INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVI. BAND VIERTES HEFT 1958

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 4. August 1958

Postverlagsort Berlin *Preis DM 13,20*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 13 01 31

Inhalt:

Seite

Christoph, P., Die 84-Minuten-Abstimmung beim Kreisel- und beim Raumkompaß 233

Krüger, H., Ein Verfahren zur Druckverteilungsrechnung an geraden und radialen Schaufelgittern. Mit 10 Abbildungen 242

Heinen, R., Beitrag zur Berechnung von Einflußflächen schiefwinkliger Platten. Mit 15 Abbildungen 268

Mittelmann, G., Beitrag zur Berechnung von Translationsschalen. Mit 11 Abbildungen 288

Kellenberger, W., Biegeschwingungen einer unrunden, rotierenden Welle in horizontaler Lage. Mit 8 Abbildungen 302

INGENIEUR-ARCHIV

XXVI. BAND VIERTES HEFT 1958

Die 84-Minuten-Abstimmung beim Kreisel- und beim Raumkompaß

Von P. Christoph

1. Einleitung. Für die Navigation ist es seit langem das letzte Ziel, nicht nur eine saubere Nordrichtungsanzeige an Bord zur Verfügung zu haben, sondern möglichst auch eine zuverlässige Fahrt-über-Grund-Anzeige. Aus der wahren Fahrtgeschwindigkeit und dem Kurs des Fahrzeuges könnte dann in einem Rechengerät der jeweilige Standort des Fahrzeuges nach geographischer Breite und Länge gewonnen werden, wenn die Daten der Position am Ausgangspunkt der Reise gegeben sind. Es ist zwar möglich, die Fahrtgeschwindigkeit als Zeitintegral aus der gemessenen Beschleunigung zu erhalten. Um jedoch Schwerebeschleunigung und Fahrtbeschleunigung voneinander sauber trennen zu können, muß vor allen Dingen eine einwandfrei horizontierte Plattform als Träger für die Beschleunigungsmeßorgane vorhanden sein; die Plattform muß möglichst genau parallel zur wahren Horizontalebene liegen. Die drei Probleme, das der Fahrt über Grund, das des künstlichen Horizontes und das der wahren Nordrichtung, hängen eng miteinander zusammen und bilden insgesamt das Problem der Inertial-Navigation. Es soll gezeigt werden, daß man prinzipiell mit einem einzigen Kreisel die kreiseltechnische Aufgabe lösen kann.

2. Die Bewegungsvorgänge auf der Erde infolge Erddrehung und Fahrtgeschwindigkeit. Zunächst sollen die kinematischen Vorgänge betrachtet werden, wie sie bei beliebiger Bewegung eines Punktes auf der kugelförmig angesetzten Erdoberfläche auftreten. Bezeichnet $\mathfrak{R}$ den vom Erdmittelpunkt ausgehenden Radiusvektor eines Erdoberflächenpunktes P, so ist seine durch den Erddrehgeschwindigkeitsvektor $\mathfrak{U}$ bedingte Geschwindigkeit im Raum gegeben durch

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{R} \,.$$

Bewegt sich der Punkt P noch zusätzlich gegenüber der Erde auf der Erdoberfläche mit der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{V}$, so gilt

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{R} + \mathfrak{V} \,. \tag{1}$$

Führt man ein erdbezogenes rechtshändiges, orthogonales Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein (Einheitsvektoren in der Nord-, Ost- und Nadirrichtung[1], so kann man gemäß

$$\mathfrak{R} = -R\,\mathfrak{k} \tag{2}$$

auch schreiben

$$\frac{d\mathfrak{k}}{dt} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{k} - \frac{\mathfrak{V}}{R} \tag{3}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V} &= \mathfrak{i}\,(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{i}) + \mathfrak{j}\,(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{j}) = V\,(\mathfrak{i}\cos\varkappa + \mathfrak{j}\sin\varkappa) \\ \mathfrak{U} &= \mathfrak{i}\,(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}) + \mathfrak{k}\,(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k}) = U\,(\mathfrak{i}\cos\varphi - \mathfrak{k}\sin\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(U Betrag der Erddrehgeschwindigkeit, φ geographische Breite, R Erdhalbmesser, $\varkappa$ Kurswinkel.)

Wegen $\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k} = 1$ ist

$$\mathfrak{k}\cdot\frac{d\mathfrak{k}}{dt} = 0 \,, \tag{5}$$

$d\mathfrak{k}/dt$ liegt also wie $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}\times\mathfrak{k}$ in der Horizontalebene. Um $d\mathfrak{i}/dt$ und $d\mathfrak{j}/dt$ durch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ darzustellen, geht man von den Gleichungen aus

$$\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{k} = 0 \,, \quad \mathfrak{U}\cdot\mathfrak{j} = 0 \,, \quad \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j} = 1 \,, \quad \mathfrak{i} = \mathfrak{j}\times\mathfrak{k} \,, \quad \mathfrak{U} = \text{const} \,. \tag{6}$$

[1] Der Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ hat die Richtung der reinen Gravitationskraft ausschließlich der Fliehkraft infolge der Erdrotation.

Durch Differentiation ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{j}\cdot\frac{d\mathfrak{k}}{dt}+\mathfrak{k}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=0\,, \qquad \mathfrak{U}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+\mathfrak{j}\cdot\frac{d\mathfrak{U}}{dt}=\mathfrak{U}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=0\,,\\ &\mathfrak{j}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=0\,, \qquad \frac{d\mathfrak{i}}{dt}=\mathfrak{j}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}+\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\times\mathfrak{k}\,, \qquad \frac{d\mathfrak{U}}{dt}=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Der Vektor $d\mathfrak{j}/dt$ läßt sich durch die drei aufeinander senkrecht stehenden Vektoren $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{U}\times\mathfrak{j}$ darstellen:

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=c_1\,\mathfrak{U}+c_2\,\mathfrak{j}+c_3\,\mathfrak{U}\times\mathfrak{j}\,.$$

Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ ergibt nach den Gleichungen (7)

$$c_1=0\,, \qquad c_2=0\,, \qquad c_3=\frac{\mathfrak{k}\cdot\dfrac{d\mathfrak{j}}{dt}}{\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\,.$$

Zur Berechnung von c_3 benutzt man die erste Gleichung aus (7), die mit (3) ergibt

$$\mathfrak{k}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=-\,\mathfrak{j}\cdot\frac{d\mathfrak{k}}{dt}=-\,\mathfrak{j}\cdot\left(\mathfrak{U}\times\mathfrak{k}-\frac{\mathfrak{B}}{R}\right).$$

Für den Koeffizienten c_3 ergibt sich schließlich

$$c_3=\frac{\mathfrak{k}\cdot\dfrac{d\mathfrak{j}}{dt}}{\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}=-\,\frac{\mathfrak{j}\cdot\left(\mathfrak{U}\times\mathfrak{k}-\dfrac{\mathfrak{B}}{R}\right)}{\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}=-\,\frac{\mathfrak{U}\cdot(\mathfrak{k}\times\mathfrak{j})-\dfrac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j}}{R}}{\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}=\frac{\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}+\dfrac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{i}}{R}}{\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\,.$$

Somit ist insgesamt

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{j}}{dt}&=\left(1+\frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{i}}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\right)\mathfrak{U}\times\mathfrak{j}=\left(\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}\right)\times\mathfrak{j}-\mathfrak{i}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\\ &=\left(\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}+\mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\right)\times\mathfrak{j}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Aus der vorletzten Gleichung (7) läßt sich mit (3) und (8) $d\mathfrak{i}/dt$ berechnen:

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt}=\left(\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}\right)\times\mathfrak{i}+\mathfrak{j}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}=\left(\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}+\mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\right)\times\mathfrak{i}\,. \tag{9}$$

Nunmehr kann der Geschwindigkeitsvektor eines jeden **erdfesten** Vektors $\mathfrak{E}=e_1\,\mathfrak{i}+e_2\,\mathfrak{j}+e_3\,\mathfrak{k}$, mit

$$\frac{de_1}{dt}=0\,, \qquad \frac{de_2}{dt}=0\,, \qquad \frac{de_3}{dt}=0$$

angegeben werden. Es ist

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt}=e_1\frac{d\mathfrak{i}}{dt}+e_2\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+e_3\frac{d\mathfrak{k}}{dt}=\left[\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}+\mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\right]\times\mathfrak{E}\,.$$

Andererseits dreht sich ein **inertialraumfester** Vektor $\mathfrak{I}=i_1\,\mathfrak{i}+i_2\,\mathfrak{j}+i_3\,\mathfrak{k}$ im Erdsystem des Beobachters mit der Geschwindigkeit[1]

$$\dot{\mathfrak{I}}=\mathfrak{i}\,\frac{di_1}{dt}+\mathfrak{j}\,\frac{di_2}{dt}+\mathfrak{k}\,\frac{di_3}{dt}=\mathfrak{I}\times\left[\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}+\mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\right], \qquad \frac{d\mathfrak{I}}{dt}=0\,.$$

Allgemein gilt für den Differentialquotienten eines beliebigen Vektors $\mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{A}}{dt}&=\frac{d}{dt}\,(a_1\,\mathfrak{i}+a_2\,\mathfrak{j}+a_3\,\mathfrak{k})=\mathfrak{i}\,\frac{da_1}{dt}+\mathfrak{j}\,\frac{da_2}{dt}+\mathfrak{k}\,\frac{da_3}{dt}+a_1\frac{d\mathfrak{i}}{dt}+a_2\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+a_3\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\\ &=\dot{\mathfrak{A}}+\left[\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}+\mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}}\right]\times\mathfrak{A}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Der Vektor

$$\mathfrak{U}^*=\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}}{R}+\mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{i}} \tag{11}$$

[1] Mit einem Punkt sei der zeitliche Differentialquotient für Veränderungen relativ zur Erde bezeichnet!

ist der momentane Gesamtdrehgeschwindigkeitsvektor — von den Drehbewegungen des Schlingerns und Stampfens abgesehen —, den das auf der Erdoberfläche befindliche Fahrzeug infolge Erddrehung und Eigengeschwindigkeit im Inertialraum besitzt. $\mathfrak{U}^*$ läßt sich allein durch die Einheitsvektoren und ihre Ableitungen ausdrücken:

$$\mathfrak{U}^* = \mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt} + \mathfrak{k}\left(\mathfrak{j} \cdot \frac{d\mathfrak{i}}{dt}\right) = \mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt} - \mathfrak{k}\left(\mathfrak{i} \cdot \frac{d\mathfrak{j}}{dt}\right); \tag{12}$$

dabei ist $\mathfrak{k} \times d\mathfrak{k}/dt$ die in der Horizontalebene liegende Komponente von $\mathfrak{U}^*$ und $\mathfrak{k}\,(\mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{i}/dt)$ die Vertikalkomponente von $\mathfrak{U}^*$.

3. Die Bewegungsgleichungen des Kreisels und Kompaßkreisels auf der Erde. Ist der betrachtete Vektor der Drehimpulsvektor $\mathfrak{B}$ eines erdfest gehaltenen Kreisels[1], so ändert sich seine Lage im Inertialraum gemäß

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{U}^* \times \mathfrak{B}\,.$$

Soll der Kreisel seine erdfeste Orientierung behalten, so muß man auf ihn das Drehmoment $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}^* \times \mathfrak{B}$ ausüben. Dabei erzeugt er auf seine Umgebung das entgegengesetzt gerichtete Drehmoment der Kreiselwirkung, das verallgemeinerte Erdachsenrichtmoment $\mathfrak{B} \times \mathfrak{U}^*$. Zeigt z. B. ein Kreisel die Vertikale an: $\mathfrak{B} = B\,\mathfrak{k}$, so muß man auf ihn das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = B\left(\mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{B} \times \mathfrak{k}}{R} + \mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{k})\,(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{j})}{R\,\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{i}}\right) \times \mathfrak{k} = -B\left(\mathfrak{j}\,U\cos\varphi + \frac{\mathfrak{B}}{R}\right)$$

einwirken lassen, damit er weiterhin die Vertikale anzeigt. Außer der Fahrtgeschwindigkeit und der geographischen Breite muß also für die richtige Drehmomentenbildung auch noch die Ostrichtung $\mathfrak{j}$ bekannt sein.

Allgemein kann man die räumliche Veränderung des Kreiseldrehimpulses $\mathfrak{B}$ gemäß (10) ausdrücken

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \dot{\mathfrak{B}} + \mathfrak{U}^* \times \mathfrak{B}\,. \tag{13}$$

Die Bewegungsgleichung des ungedämpft schwingenden Kompaßkreisels ist durch den Drehimpulssatz gegeben:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \dot{\mathfrak{B}} + \left[\mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt} + \mathfrak{k}\left(\mathfrak{j} \cdot \frac{d\mathfrak{i}}{dt}\right)\right] \times \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{S}}{g} \times \left(\mathfrak{k}\,g + R\,\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}\right). \tag{14}$$

Hierbei ist $\mathfrak{S}$ der vom Unterstützungspunkt des Kreiselsystems ausgehende Radiusvektor des Kreiselsystem-Schwerpunktes, multipliziert mit dem Gewicht des Systems, und g die Schwerebeschleunigung. Es sei $S = |\mathfrak{S}|$. Ferner ist $-R\,\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}$ die Beschleunigung des Kreiselsystems im Inertialraum:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} &= -R\,\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2} = -R\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right) = -R\,\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{U} \times \mathfrak{k} - \frac{\mathfrak{B}}{R}\right)\\ &= -R\left(\mathfrak{U} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt} - \frac{1}{R}\,\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) = -R\,\mathfrak{U} \times \left(\mathfrak{U} \times \mathfrak{k} - \frac{\mathfrak{B}}{R}\right) + \dot{\mathfrak{B}} + \mathfrak{U}^* \times \mathfrak{B}\\ &= -R\,\mathfrak{U} \times (\mathfrak{U} \times \mathfrak{k}) + 2\,\mathfrak{U} \times \mathfrak{B} + \dot{\mathfrak{B}} + \left[\mathfrak{B} \times \mathfrak{k} + \mathfrak{k}\,\frac{(\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{k})\,(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{j})}{\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{i}}\right] \times \frac{\mathfrak{B}}{R}\,.\end{aligned}$$

Endlich ist $\mathfrak{S} \times \mathfrak{k}$ das durch die Erdschwere entstehende Drehmoment, $\mathfrak{S} \times \frac{R}{g}\,\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}$ das durch die Beschleunigung entstehende Moment. $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{S} = 0$ sei durch Konstruktion und Justierung erfüllt.

4. Die beschleunigungsunabhängige azimutale und horizontale Gleichgewichtslage des Kompaßkreisels. Eine notwendige Bedingung dafür, daß die stationäre Gleichgewichtslage des Kreiseldrehimpulses erreicht ist, ist das Verschwinden des verallgemeinerten Meridianrichtmomentes, der Vertikalkomponente des verallgemeinerten Erdachsenrichtmomentes

$$\mathfrak{k} \cdot (\mathfrak{B}_C \times \mathfrak{U}^*) = 0 \tag{15}$$

[1] Es werden nur schnelle Kreisel betrachtet (vgl. z. B. *R. Grammel*, Der Kreisel, 2. Aufl., Bd. 1, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950).

oder auch

$$\mathfrak{k}\cdot\left[\mathfrak{B}_G\times\left(\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}+\mathfrak{k}\left(\mathfrak{j}\cdot\frac{d\mathfrak{i}}{dt}\right)\right)\right]=\mathfrak{k}\cdot\left(\mathfrak{B}_G\times\left(\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right)\right)=0\,.$$

Mit dem Entwicklungssatz für das zweifache Vektorprodukt ergibt sich weiter und wegen (5)

$$\mathfrak{k}\cdot\left(\mathfrak{k}\left(\mathfrak{B}_G\cdot\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right)-\frac{d\mathfrak{k}}{dt}(\mathfrak{B}_G\cdot\mathfrak{k})\right)=\mathfrak{B}_G\cdot\frac{d\mathfrak{k}}{dt}=0\,. \tag{16}$$

Der Vektor $\mathfrak{B}$ muß also in der Gleichgewichtslage $\mathfrak{B}_G$ auf dem in der Horizontalebene liegenden Vektor $d\mathfrak{k}/dt$ senkrecht stehen. Ergänzt man noch die notwendige Bedingung (16) durch den Ansatz $\mathfrak{B}_G\cdot\mathfrak{k}=0$, d. h. $\mathfrak{B}_G$ liegt in der Horizontalebene, so kann man insgesamt für die Gleichgewichtslage $\mathfrak{B}_G$ setzen

$$\mathfrak{B}_G=A\,\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\,. \tag{17}$$

Für $\mathfrak{S}$ folgt daraus und wegen $\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{S}=0$

$$\mathfrak{S}_G=S\,\mathfrak{k}\,. \tag{17a}$$

In der Tat ist der Ansatz (17) und (17a) erfüllbar, wenn (14) erfüllt werden kann. Es müßte somit gemäß (14) sein

$$\frac{d\mathfrak{B}_G}{dt}=A\,\mathfrak{k}\times\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}=S\,\mathfrak{k}\times\left(\mathfrak{k}+\frac{R}{g}\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}\right)=\frac{S\,R}{g}\,\mathfrak{k}\times\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}\,.$$

Diese Gleichung kann erfüllt werden, wenn $A=S\,R/g$ gemacht wird. Sorgt man also dafür, daß der Drehimpuls des Kompaßkreisels stets durch die Gleichung

$$B=|\mathfrak{B}|=\frac{S\,R}{g}\left|\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right|=\frac{S\,R}{g}\left|\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right|=\frac{S\,R}{g}\left|\mathfrak{U}\times\mathfrak{k}-\frac{\mathfrak{V}}{R}\right| \tag{18}$$

gegeben ist, d. h. proportional zur Gesamtgeschwindigkeit des Fahrzeugs im Raum $\left|\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right|=R\left|\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right|$ gehalten wird, und ist die momentane Richtung seines Vektors durch

$$\mathfrak{B}_G=\frac{S\,R}{g}\,\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}=\frac{S\,R}{g}\,\mathfrak{k}\times\left(\mathfrak{U}\times\mathfrak{k}-\frac{\mathfrak{V}}{R}\right)=\frac{S\,R}{g}\left(\mathfrak{i}\,U\cos\varphi+\mathfrak{i}\,\frac{V}{R}\sin\varkappa-\mathfrak{j}\,\frac{V}{R}\cos\varkappa\right), \tag{19}$$

die des Schwerpunktvektors durch

$$\mathfrak{S}_G=S\,\mathfrak{k} \tag{19a}$$

gegeben, so ist $\mathfrak{B}_G$ und $\mathfrak{S}_G$ eine stationäre Gleichgewichtslage. Wie der Aufbau der Gleichung (19) zeigt, ist sie völlig unabhängig von Beschleunigungen $R\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}$. Die aus (19) folgende zeitliche Änderung von $\mathfrak{B}_G$

$$\frac{d\mathfrak{B}_G}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{S\,R}{g}\,\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right)=\frac{S\,R}{g}\,\mathfrak{k}\times\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}$$

wird exakt durch das Beschleunigungsdrehmoment

$$\mathfrak{S}_G\times\left(\mathfrak{k}+\frac{R}{g}\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}\right)=S\,\mathfrak{k}\times\left(\mathfrak{k}+\frac{R}{g}\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}\right)=\frac{S\,R}{g}\,\mathfrak{k}\times\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}$$

erzielt. Die zeitliche Änderung von $\mathfrak{B}_G$ relativ zur Erde ergibt sich aus (13) zu

$$\dot{\mathfrak{B}}_G=\mathfrak{i}\,\frac{S}{g}\,(\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{k})\,(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{i})-\frac{S}{g}\,\mathfrak{k}\times\dot{\mathfrak{B}}\,.$$

Sie liegt in der Horizontalebene. Befindet sich der Drehimpulsvektor $\mathfrak{B}$ nicht in der Gleichgewichtslage $\mathfrak{B}_G$, so führt er Schwingungen um diese aus, die bei kleinen Auslenkungen bekanntlich harmonisch sind. Nach Einführung *Euler*scher Winkel kann man (14) im (i, j, k)-System koordinatenmäßig darstellen. Die so entstehenden Koordinatengleichungen sind ziemlich unübersichtlich und sollen deshalb nicht angeschrieben werden. Für verschwindende Fahrt $V=0$ und bei Beschränkung auf kleine Auslenkungen erhält man für die harmonischen Schwingungen die bekannte Formel für die Meridianschwingungsdauer T[1] des Kreiselkompasses

$$T=2\pi\sqrt{\frac{B}{S\,U\cos\varphi}}\,,$$

[1] Vgl. z. B. *R. Grammel*, Der Kreisel, Bd. 2, 2. Aufl., S. 109. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

die wegen der aus (19) folgenden Beziehung

$$B = \frac{S\,R\,U\cos\varphi}{g}$$

in den für alle Breiten konstanten Wert

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84 \text{ Minuten} \tag{20}$$

übergeht.[1]

Aus (19) ergibt sich, daß der Drehimpulsvektor nicht genau in die wahre Nordrichtung $\mathfrak{i}$ zeigt. Diese Auslenkung von $\mathfrak{B}_G$ aus der Nordrichtung ist der von geographischer Breite φ, Fahrtgeschwindigkeit V und dem Kurs $\varkappa$ abhängige Fahrtfehler δ:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{\frac{V}{R}\cos\varkappa}{U\cos\varphi + \frac{V}{R}\sin\varkappa} \tag{21}$$

oder, wenn man von dem um den Fahrtfehler gefälschten Kompaßkurs $Z = \varkappa - \delta$ ausgeht,

$$\sin\delta = -\frac{V\cos Z}{R\,U\cos\varphi}\,. \tag{21a}$$

Der Fahrtfehler wird hervorgerufen durch das in (19) enthaltene Drehimpulsglied $\frac{S}{g}\,\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}$. Da seine Richtung $\mathfrak{B}\times\mathfrak{k}$ stets nach Backbord gerichtet ist, wird es von *Glitscher*[2] als „natürlicher Drall nach Backbord" bezeichnet.

Um die Beschleunigungseinwirkung besser zu erkennen, möge der beschleunigungsproportionale Vektor $d^2\mathfrak{k}/dt^2$ entsprechend seiner Einwirkung auf den Kreisel in orthogonale Komponenten aufgeteilt werden:

$$\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2} = a\frac{d\mathfrak{k}}{dt} + b\,\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt} + c\,\mathfrak{k} \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{k}\cdot\frac{d\mathfrak{k}}{dt} = 0\,. \tag{22}$$

Die zweite Beschleunigungskomponente von (22) $b\,\mathfrak{k}\times d\mathfrak{k}/dt$, die die Richtung des Kreiseldrehimpulses hat und die besagt, daß sich $d\mathfrak{k}/dt$ um die Vertikale dreht, ergibt mit dem Schwerpunkt-Vektor $\mathfrak{S} = S\,\mathfrak{k}$ ein Drehmoment $\frac{R\,S}{g}\,\mathfrak{k}\times\left(b\,\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right)$ senkrecht zum Drehimpuls und läßt nach dem Präzessionsgesetz den Kreiseldrall sich um die Vertikale $\mathfrak{k}$ drehen, entsprechend dem Fahrtfehler, der sich wegen der Drehung von $d\mathfrak{k}/dt$ um die Vertikale ebenfalls ändert. Die erste Beschleunigungskomponente von (22) $a\,d\mathfrak{k}/dt$, die die Richtung von $d\mathfrak{k}/dt$ hat und die besagt, daß der Vektor $d\mathfrak{k}/dt$ seinen Betrag ändert, erzeugt ein Drehmoment parallel zum Kreiselimpuls; er ändert seine Richtung nicht, jedoch seinen absoluten Betrag gemäß (18). Das durch Veränderung des Drehimpulsbetrages am Kreiselgehäuse wirksam werdende Reaktionsmoment ist entgegengesetzt gleich dem Beschleunigungsdrehmoment $S\,\mathfrak{k}\times\left(\frac{R}{g}\,a\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right)$: Vektor $\mathfrak{S}$ dreht sich nicht um die freie Kreiseldrehimpulsachse, sondern bleibt weiterhin vertikal gerichtet. Auf der Beachtung dieses Abgleichs der um die Kreiselachse wirksamen Drehmomente beruht die Raumkompaß-Eigenschaft. Die vertikale Beschleunigungskomponente $c\,\mathfrak{k}$ trägt wegen $S\,\mathfrak{k}\times\frac{R}{g}\,c\,\mathfrak{k} = 0$ zur Momentenbildung überhaupt nichts bei.

Man kann zusammenfassen: Ein Kompaßkreiselsystem, das die Forderung (18) erfüllt und sich in der durch (19) und (19a) gegebenen Gleichgewichtslage befindet, bleibt, total unabhängig von Beschleunigungen, in dieser. Seine azimutale Gleichgewichtslage ist durch den Fahrtfehler gegeben, seine horizontale Gleichgewichtslage ist der wahre Horizont, mit anderen Worten: ein solches Kreiselsystem ist ein „Raumkompaß".

5. Die verschiedenen prinzipiellen Möglichkeiten zur Realisierung des Raumkompasses. Die Erfüllung von Gleichung (18) gelingt am einfachsten, wenn man einen einzigen Kreisel benutzt

---

[1] *M. Schuler*, Physik. Z. 24 (1923) S. 344.
[2] *K. Glitscher*, Wissensch. Veröffentlichungen aus den Siemens-Werken 19 (1940) S. 191.

und seine Drehzahl ω in Abhängigkeit von φ, V und $\varkappa$ variiert gemäß der Gleichung

$$B = \Theta\,\omega = \frac{S\,R}{g}\sqrt{\left(U\cos\varphi + \frac{V}{R}\right)^2 + \frac{2\,V\,U\cos\varphi}{R}\,(\sin\varkappa - 1)} \tag{23}$$

wobei Θ das Trägheitsmoment des Kreisels ist.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, daß man den Drehimpuls des Kreiselsystems aufteilt in zwei Kreisel mit gleichbleibender Kreiseldrehzahl, deren Gehäuse auf motorischem Wege in einem Rahmen um parallele Achsen, z. B. die Hochachse, um entgegengesetzt gleiche Winkel ϑ gedreht werden können. Durch die Größe des Spreizwinkels $2\,\vartheta$ ist der Gesamtdrehimpuls gegeben. Die gemäß (18) bei horizontalen Beschleunigungen senkrecht zur Gesamtdrehimpulsachse erforderliche Drehimpulsänderung wird durch von außen gesteuerte motorische Veränderung des Spreizwinkels $2\,\vartheta$ erzwungen. Das bei dieser zwangsweisen Gesamtdrehimpulsänderung sich entwickelnde Kreiselwirkungsmoment — parallel zum Gesamtdrehimpuls — wird wieder aufgenommen durch das Moment der am Kreiselsystem-Schwerpunkt angreifenden Beschleunigungskraft.

Beim *Anschütz*-Raumkompaß[1] wird Gleichung (18) automatisch durch einen Zweikreiselverband[2] mit passender Abstimmung der Fesselungsmomente erreicht. Im Folgenden soll untersucht werden, welcher Winkelfunktion sie genügen müssen.

Für die beiden Kreisel mit den Drehimpulsen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ gilt

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{d\mathfrak{B}_1}{dt} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{M}_2 = \frac{d\mathfrak{B}_2}{dt}\,. \tag{24}$$

$\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ sind die auf Kreisel **1** und **2** insgesamt einwirkenden Drehmomente, also einschließlich der zwischen beiden Kreiseln wirksamen Reaktionsdrehmomente. Nach dem Präzessionsgesetz präzedieren die Kreisel im Raum mit den Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{B}_1\,, \qquad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{W}_2 \times \mathfrak{B}_2\,. \tag{25}$$

$\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ kann man aufteilen in den Drehgeschwindigkeitsanteil $\mathfrak{W}_R$ des Kreiselverbandrahmens und in die Relativdrehgeschwindigkeiten der Kreisel gegenüber dem Rahmen:

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_R + \mathfrak{W}_{1\,rel}\,, \qquad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{W}_R + \mathfrak{W}_{2\,rel}\,. \tag{26}$$

Wegen der Kopplung der Kreisel gilt

$$\mathfrak{W}_{2\,rel} = -\,\mathfrak{W}_{1\,rel}\,. \tag{27}$$

Unter Beachtung von (25), (26), (27) erhält man durch Summation und Differenzbildung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 &= \mathfrak{W}_R \times (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) + \mathfrak{W}_{1\,rel} \times (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)\,, \\ \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 &= \mathfrak{W}_R \times (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) + \mathfrak{W}_{1\,rel} \times (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Schließen die beiden Kreiselachsen den Winkel $2\,\vartheta$ miteinander ein, und bezeichnen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{h}$ die orthogonalen Einheitsvektoren der Kreiselresultantenachse, der Querachse und der Hochachse des Kreiselrahmens, so kann man schreiben

$$\mathfrak{W}_{1\,rel} = \mathfrak{h}\,\dot{\vartheta}\,. \tag{29}$$

Durch skalare Multiplikation von (28,2) mit $\mathfrak{h}$ vereinfacht sich diese Gleichung unter Beachtung von (29) zu

$$\mathfrak{h}\cdot(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{h}\cdot(\mathfrak{W}_R \times (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2))\,.$$

In der Hochachse ist zwischen den Kreiseln in der Differenz der Momente nur das Federmoment wirksam:

$$F(\vartheta) = \mathfrak{h}\cdot(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{h}\cdot(\mathfrak{W}_R \times (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2))\,. \tag{30}$$

Für die Drehgeschwindigkeit des Kreiselrahmens im Raum kann man schreiben

$$\mathfrak{W}_R = \mathfrak{w} + \mathfrak{U}^*\,, \tag{31}$$

wenn $\mathfrak{w}$ die Drehgeschwindigkeit des Kreiselsystemrahmens relativ zur Erde bezeichnet. Somit wird aus (30) mit (31)

$$F(\vartheta) = \mathfrak{h}\cdot((\mathfrak{w} + \mathfrak{U}^*) \times (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2))\,. \tag{32}$$

---

[1] *J. W. Geckeler*, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 229. Die Geckelerschen Gleichungen führen immer noch zu kleinen Schwingungen bei Fahrzeugbewegungen. Der Grund liegt darin, daß er bei der Ableitung der Gleichungen das Glied $2\,B_0\,\beta\,d\,(\sin\varepsilon)/dt$ unberücksichtigt gelassen hat.

[2] Vgl. z. B. *P. Christoph*, Dtsch. Hydrograph. Z. 6 (1953) S. 207.

Da in der Gleichgewichtslage sich der Rahmen nur um die Vertikale drehen und $\mathfrak{h}$ die Vertikale anzeigen soll, fällt $\mathfrak{w}$ aus (32) heraus. Somit vereinfacht sich (32) zu

$$\mathfrak{k} \cdot (\mathfrak{U}^* \times (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)) = F(\vartheta) . \tag{33}$$

Andererseits muß, wenn

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 = \frac{R\,S}{g}\,\mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{S} \equiv S\,\mathfrak{h} \doteq S\,\mathfrak{k} \tag{34}$$

sein soll, $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2$ die Richtung von $d\mathfrak{k}/dt$ haben:

$$\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2 = M \frac{d\mathfrak{k}}{dt} . \tag{35}$$

Gleichung (33) kann somit weiter umgeformt werden zu

$$F(\vartheta) = \mathfrak{k} \cdot \left(\mathfrak{U}^* \times M \frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right) \tag{36}$$

oder wegen (12)

$$-M \left(\mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right)^2 = F(\vartheta) . \tag{37}$$

Es muß also die vektorielle Differenz der Drehimpulse die Form haben

$$\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2 = -\frac{d\mathfrak{k}}{dt} \cdot \frac{F(\vartheta)}{\left(\mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right)^2} . \tag{38}$$

Durch Betrachtung der Beträge der Gleichungen (34) und (38)

$$\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 = 2\,B_0 \cos\vartheta ,$$
$$\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2 = 2\,B_0 \sin\vartheta ,$$
$$\left|\mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right| = \left|\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right| ,$$

wobei B_0 der Drehimpuls der einzelnen Kreisel ist, ergibt sich die bekannte Forderung für das Federgesetz der Kreiselfesselung beim *Anschütz*-Raumkompaß:

$$F(\vartheta) = 4\,B_0^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot \frac{R\,S}{g} . \tag{39}$$

Jeder Kreisel muß mit dem Moment $\frac{1}{2} F(\vartheta)$ in die statische Gleichgewichtslage $\vartheta = 90°$ vom Kreiselrahmen zurückgezogen werden. Ist diese Forderung erfüllt, dann hat der Kompaß die Eigenschaft des Raumkompasses. Die Drehzahl der beiden Kreisel bleibt konstant, der Gesamtdrehimpuls des Kreiselsystems stellt sich automatisch auf den geforderten Wert $\frac{S\,R}{g}\,\mathfrak{k} \times \frac{d\mathfrak{k}}{dt}$ ein. Eine horizontale Beschleunigungskomponente senkrecht zum Gesamtdrehimpuls, welche ein Drehmoment um die Gesamtdrehimpulsachse erzeugt, läßt die beiden Kreisel gegeneinander im Innern des Kreiselrahmens präzedieren, so daß der Betrag des Gesamtdrehimpulses sich gemäß (18) ändert.

Bei dem Kompaß von *Glitscher*[1] befindet sich im Kreiselsystem außer dem Hauptkreiselsystem noch ein Hilfskreiselsystem, das den Drall nach Backbord künstlich erzeugen soll. Der Drehimpulsbetrag des Hilfskreiselsystems wird proportional der Fahrzeuggeschwindigkeit und seine Richtung auf motorischem Wege stets nach Backbord orientiert gehalten. Ist $\varkappa$ der wahre Kurs des Fahrzeuges, so soll also der Gesamtdrehimpuls des Kreiselsystems durch

$$\mathfrak{B} = \frac{R\,S\,U\cos\varphi}{g}\,\mathfrak{r} + \frac{S\,V}{g}\,(\mathfrak{r}\sin\varkappa - \mathfrak{q}\cos\varkappa) \tag{40}$$

gegeben sein. Der Vektor $\mathfrak{r}$ gibt die Achsenrichtung des Hauptkreiselsystems, $\mathfrak{q}$ die Querachse an.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die allgemeine Kompaßschwingungsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \dot{\mathfrak{B}} + \mathfrak{U}^* \times \mathfrak{B} = \mathfrak{S} \times \left(\mathfrak{k} + \frac{R}{g}\,\frac{d^2\mathfrak{k}}{dt^2}\right)$$
$$= \mathfrak{S} \times \left[\mathfrak{k} + \frac{R}{g}\,\mathfrak{U}^* \times (\mathfrak{U} \times \mathfrak{k}) + \frac{2}{g}\mathfrak{B} \times \mathfrak{U} - \frac{\dot{\mathfrak{B}}}{g} - \mathfrak{k}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{g\,R} + \frac{\mathfrak{B} \times \mathfrak{k}}{g}\,\frac{(\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{k})(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{i})}{R\,\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{i}}\right] \tag{41}$$

[1] *K. Glitscher*, DRP. Nr. 599 596, 1932. Kreiselkompaß für Fahrzeuge. Er beachtet jedoch nicht die φ-Abhängigkeit des Drehimpulses des Hauptkreiselsystems.

mit dem Ansatz (40) die stationäre Gleichgewichtslage

$$\mathfrak{r}_G = \mathfrak{i}\,, \qquad \mathfrak{q}_G = \mathfrak{j}\,, \qquad \mathfrak{h}_G = \mathfrak{k} \tag{42}$$

enthält. Infolge des hier künstlich eingegebenen Dralls nach Backbord entfällt die Auslenkung des Haupt-Kreiselsystems aus der wahren Nordrichtung um den sonst vorhandenen Fahrtfehler. Auch hier ist der Kompaß ein Raumkompaß.

6. Die Erfüllung der Bedingung bei den handelsüblichen Kreiselkompassen. Die strenge Vorschrift für den Drehimpuls des Raumkompaß-Kreiselsystems

$$|\mathfrak{B}| = \frac{RS}{g}\left|\mathfrak{k}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right| = \frac{RS}{g}\left|\mathfrak{U}\times\mathfrak{k} - \frac{\mathfrak{V}}{R}\right| = \frac{RS}{g}\sqrt{\left(U\cos\varphi + \frac{V}{R}\sin\varkappa\right)^2 + \frac{V^2\cos^2\varkappa}{R^2}}$$

ist bei den handelsüblichen Kreiselkompassen nur annähernd erfüllt. Es wird $\mathfrak{V}/R$ gegen $\mathfrak{U}\times\mathfrak{k}$ vernachlässigt, vielfach auch die durch $\mathfrak{U}\times\mathfrak{k} = \mathfrak{i}\,U\cos\varphi$ gegebene Abhängigkeit von der geographischen Breite φ. Nur bei gewissen Kriegsmarine-Kompassen ist eine stufenweise Berücksichtigung der Breitenabhängigkeit für ziemlich große Breitenbereiche möglich. Infolgedessen müssen bei den handelsüblichen Kompassen sowohl in der Azimut- wie in der Horizontanzeige kleinere Fehler auftreten.

7. Die technischen Aussichten zur Realisierung des Raumkompasses. In den dreißiger Jahren versuchte die Firma Anschütz, ihren Raumkompaß in einem Modellgerät[1] zu verwirklichen. Die gewonnenen experimentellen Ergebnisse entsprachen nicht den Erwartungen, da die theoretischen Forderungen wohl nicht voll erfüllt werden konnten. Es ist zu vermuten, daß bei der Lagerung der beiden Kreisel um die Hochachse im Innern der Kreiselkugel nicht die Reibungs- und Störmomentenfreiheit erreicht wurde, wie sie angesichts der winzigen Federfesselungsmomente (39) erforderlich ist. Es ist möglich, daß auch magnetisch bedingte Störmomente mitgespielt haben.

Es erscheint aussichtsreich, die Raumkompaßeigenschaften über die Kreiseldrehzahlsteuerung zu gewinnen, allerdings nicht mit einem, sondern zwei drehzahlgesteuerten Kreiseln, die durch eine stärkere Fesselung an eine praktisch konstante Gleichgewichtslage im Kreiselverband-Rahmen gebunden sind[2]. Bei Verwendung eines einzelnen Kreisels würde sich die Drehzahlsteuerung wegen der Trägheit des Umformers, falls man keinen Wechselrichter benutzt, nicht verzögerungsfrei durchführen lassen. Das würde insbesondere zu einem Schlingerfehler führen. Bei einem Kreiselverband würde sich aber eine geringe Verzögerung infolge der Integrationseigenschaft der Kreisel kaum auswirken. Prinzipiell könnte jedes handelsübliche Kreiselkompaßsystem, das punktweise gelagert ist (*Anschütz*, *Arma*, *Plath*), hierfür verwendet werden. Die Schwierigkeit des *Anschütz*-Raumkompasses, genügend reibungs- und störmomentenfreie Lager im Kreiselsystem-Innern herzustellen, würde entfallen. Dafür wäre die Kreiselantriebsfrequenz und -spannung in Abhängigkeit von φ, V und $\varkappa$ zu steuern. Es dürfte für viele Zwecke genügen, die Fahrt mit einem üblichen Fahrtmesser zu messen. Den Kurs liefert der Kompaß selbst. Die nord-südliche Fahrtkomponente $\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{i} = V\cos\varkappa$ gibt die Breitenänderung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V\cos\varkappa}{R}$$

und das Integral die ganze Breitenänderung $\Delta\varphi$, die sich gegenüber der Breite des Ausgangspunktes der Reise eingestellt hat:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{R}\int V\cos\varkappa\,dt\,.$$

Ein Rechengerät, dem V und $\varkappa$ laufend eingegeben werden müßten, hätte den Sollwert für die Antriebsfrequenz zu liefern.

8. Der Raumkompaß als Vorstufe für ein Inertial-Navigationssystem. Mit dem Raumkompaß kann aber auch ein ganzes Inertial-Navigations-Meßsystem aufgebaut werden, das außer der Nordrichtung und dem wahren Horizont auch die Fahrt über Grund[3] und den Standort anzeigt. Hierfür wäre erforderlich, im Kreiselsystem in den Richtungen der beiden horizontalen Hauptachsen, der Kreiseldrehimpulsachse und der Querachse, je ein Beschleunigungsmeßorgan einzubauen, ihre Meß-

[1] Vgl. *R. Grammel*, Der Kreisel, 2. Aufl., Bd. 2, S. 140. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

[2] Beim *Arma*-Kompaß werden die beiden Kreisel bereits mit verschiedener Drehzahl stufenweise in Abhängigkeit von der Breite betrieben, vgl. *A. L. Rawlings*, The Theory of the Gyroscopic Compass and its Deviations, S. 73, New York 1944.

[3] Näheres bei *P. Christoph*, Dtsch. Hydrograph. Z. 11 (1958) im Druck.

werte nach außen zu übertragen und da dem Rechenaggregat zur Verarbeitung zuzuführen, das dann bei gegebener Breite nach Integration und nach Abzug des durch die Erddrehung gegebenen Anteils die Fahrt über Grund, aber auch die Breitenänderung und die Längenänderung, vom Ausgangspunkt gemessen, liefert. Die Steuerung der Kreiseldrehzahl müßte allein von dem Meßwert des Beschleunigungsmeßorganes besorgt werden, das die Beschleunigungskomponente in Richtung der Querachse mißt, da die Drehbeschleunigung der Kreisel proportional zu dieser Beschleunigungskomponente zu halten ist.

9. Zusammenfassung. Bekanntlich muß bei allen Kreiselkompaßtypen zur Vermeidung von Beschleunigungseinflüssen auf die Kompaßanzeige bei Fahrt- und Kursänderungen die Meridianschwingungsdauer des Kreiselsystems auf 84 Minuten abgestimmt werden. Die diesbezügliche Bedingungsgleichung wird in Strenge für den schnellen Kreisel abgeleitet. Der Kreiseldrehimpuls ist danach durch das Schwererichtmoment vorgeschrieben, aber auch noch durch die geographische Breite, die Fahrtgeschwindigkeit und den Kurs. Wenn es gelingt, die Bedingungsgleichung exakt zu erfüllen, gelangt man zum sogenannten Raumkompaß, welcher nicht nur unter Beachtung des Fahrtfehlers die Nordrichtung, sondern auch den wahren Horizont bei beliebigen Fahrtbewegungen des Fahrzeuges auf der Erdoberfläche exakt anzeigt. Die Diskussion der Bedingungsgleichung führt über den bekannten Raumkompaß von *Anschütz* hinaus zu weiteren Verfahren, den Raumkompaß zu verwirklichen. Es wird darauf hingewiesen, daß bei den handelsüblichen Kreiselkompassen die Fahrtgeschwindigkeitsabhängigkeit in der Bedingungsgleichung stets vernachlässigt wird und die Abhängigkeit von der geographischen Breite meistens nur für eine Breite erfüllt ist, und daß infolgedessen mit kleineren Fehlern für Azimut und Horizontlage bei den Fahrzeugmanövern zu rechnen ist. Schließlich wird darauf hingewiesen, daß mit der Schaffung des Raumkompasses auch die Aufgabe der Inertial-Navigation, die Messung der Fahrt über Grund, im Prinzip zu lösen ist.

(Eingegangen am 14. Oktober 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Peter Christoph*, Großhansdorf bei Hamburg, Barkholt 3.

Ein Verfahren zur Druckverteilungsrechnung an geraden und radialen Schaufelgittern *

Von H. Krüger

1. Einleitung. Zur theoretischen Behandlung wird die Strömung durch Leit- und Laufräder von Turbomaschinen in bekannter Weise durch Abwicklung und Verebnung der Flußflächen in die Umströmung eines geraden (bei Axialmaschinen) oder eines kreisförmigen (bei radial oder diagonal durchströmten Maschinen) ebenen Schaufelgitters überführt. Die potentialtheoretische Druckverteilung dieser ebenen Strömung gibt, solange Grenzschichtablösung, Kompressibilitäts- und Kavitationseffekte unberücksichtigt bleiben können, einen brauchbaren Anhalt für die tatsächlichen Druckverhältnisse und Auftriebskräfte am Flügelschnitt; sie ist Ausgangspunkt für die Grenzschichtrechnung und damit für die Abschätzung des Widerstands- und Ablösungsverhaltens.

Zur Berechnung der potentialtheoretischen Geschwindigkeit am Einzelprofil — der Druckverlauf ist mit ihr durch die *Bernoulli*gleichung verknüpft — existieren einfache, hinreichend genaue Verfahren. Liegt das Profil im Verband eines Schaufelgitters, so werden die Zusammenhänge kompliziert und genaue Rechnungen langwierig. Es ist hier von Vorteil, wenn man sich auf einmal durchgeführte Berechnungen stützen kann. Diese Arbeit enthält ein Verfahren zur Geschwindigkeitsbestimmung an dünnen, gewölbten Profilen im geraden und radialen Gitter mit Hilfe vorausberechneter, tabellierter Geschwindigkeitsverteilungen. Außer dem Parallelanstrom des geraden und dem Wirbelquellanstrom des Kreisgitters kann auch dessen Rotation erfaßt werden.

Das ebene Schaufelgitter ist durch Belegung seiner Skelettlinien mit Wirbeln, Quellen und Senken darstellbar, deren Störungsfeld den Anstrom zum Umfließen der Profilkontur zwingt. Die Störgeschwindigkeiten normal zur Kontur sind durch Gittergeometrie und Anströmung bestimmt; die Tangentialkomponenten ergeben zusammen mit denen der Anströmung die Geschwindigkeitsverteilung am Profil.

Für schwachgewölbte Schaufeln im geraden Gitter ist der Zusammenhang zwischen Singularitätenbelegung und Störgeschwindigkeiten praktisch der gleiche wie beim Gitter mit geraden Skelettlinien. Beschränkt man sich weiterhin auf Wirbelbelegungen, so werden die Schaufeln unendlich dünn, und Normal- und Tangentialgeschwindigkeiten sind miteinander verknüpft wie bei Gittern aus ebenen Platten.

Das vorliegende Verfahren behandelt das „direkte Gitterproblem" (Gitterform und Anströmung vorgegeben, Geschwindigkeiten am Profil gesucht) und geht von den Normalgeschwindigkeiten aus. Für einfache, den ersten drei Gliedern einer Potenzreihe entsprechende Normalgeschwindigkeitsverläufe sind die zugehörigen Tangentialgeschwindigkeiten an verschieden gestaffelten und geteilten Plattengittern tabelliert. Sie entsprechen den bekannten *Birnbaum*schen Normalverteilungen der Einzelplatte[1] und ergeben durch Überlagerung Lösungen des direkten Problems für dünne, mäßig gewölbte Profile mit *S*-Schlag im geraden Gitter sowie — nach einer Transformation — für dünne, wenig von der logarithmischen Spirale abweichende Schaufeln im Kreisgitter.

Damit ist das Verfahren Gegenstück und Ergänzung zu den Gitterberechnungsmethoden von *Schlichting*[2] und *Scholz*[3]. *Schlichting* löst das direkte Problem für mäßig gewölbte und mäßig dicke Profile im geraden Gitter, indem er Wirbel- und Quellbelegung durch je drei Glieder einer *Birnbaum-Glauert*schen Reihe darstellt, deren Störgeschwindigkeiten für Plattengitter tabelliert sind. Die entstehende Kontur soll an drei Profilabszissen mit der vorgegebenen übereinstimmen. Man erhält ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich die Anteile der einzelnen Belegungen und damit die Faktoren zum Aufbau der Geschwindigkeitsverteilung berechnen lassen.

---

* Gekürzte Fassung der Dissertation an der T. H. Braunschweig; Berichter Prof. Dr. *H. Schlichting*; Mitberichter: Prof. Dr. *A. Betz* und Dozent Dr. *N. Scholz*. Die Arbeit wurde im Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, durchgeführt.

[1] *W. Birnbaum*, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 290.

[2] *H. Schlichting*, Berechnung der reibungsfreien inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI-Forschungsheft 447 (1955).

[3] *N. Scholz*, Ein Berechnungsverfahren zum Entwurf von Schaufelgitterprofilen. VDI-Forschungsheft 442 (1954).

Ausgangspunkt zur Lösung des „Umkehrproblems", Profilgitter von mäßiger Wölbung und Dicke mit bestimmten aerodynamischen Eigenschaften zu erzeugen, sind auch bei *Scholz* nach den ersten Gliedern der *Birnbaum-Glauert*schen Reihe gestaltete Wirbel- und Quellbelegungen gerader Skelettlinien. Im Zusammenwirken mit wenig von der Sehnenrichtung abweichenden Parallelströmungen ergeben sie profilierte Schaufeln, deren Form aus Störgeschwindigkeitstabellen leicht zu berechnen ist.

Die Brauchbarkeit des vorliegenden Verfahrens für potentialtheoretische oder ihnen nahekommende wirkliche Strömungsverhältnisse wird bestätigt durch Nachrechnung eines ebenen geraden Gitters mit bekannten theoretischen Geschwindigkeitsverteilungen und durch Experimente an einem die ebene Strömung verwirklichenden Radialgitter.

2. Gerade Gitter. a) Zusammenhang zwischen Störgeschwindigkeiten, Profilform und Anströmung. Bringt man ein ebenes, gerades Gitter aus dünnen, zunächst durchlässig gedachten Schaufeln in eine Parallelströmung der Geschwindigkeit W_∞ mit den Komponenten $W_{\infty u}$ in und W_a senkrecht zur Gitterrichtung, so wird die Schaufelkontur mit normalen und tangentialen Geschwindigkeitskomponenten w_N und w_T durchsetzt (Abb. 1a). Um die Schaufeln undurchlässig, also zu Stromlinien zu machen, hat man die w_N durch entgegengesetzt gleiche Normalgeschwindigkeiten w_n zu kompensieren, die man sich von einer Wirbelbelegung[1] $\gamma\langle s\rangle$, wo s die Lauflänge der Schaufel ist, auf der Kontur induziert denken kann. Die beim hier behandelten „direkten Gitterproblem" gesuchte Geschwindigkeitsverteilung W_K setzt sich aus den Tangentialkomponenten des ungestörten Anstroms und der von den Wirbeln herrührenden Störströmung zusammen:

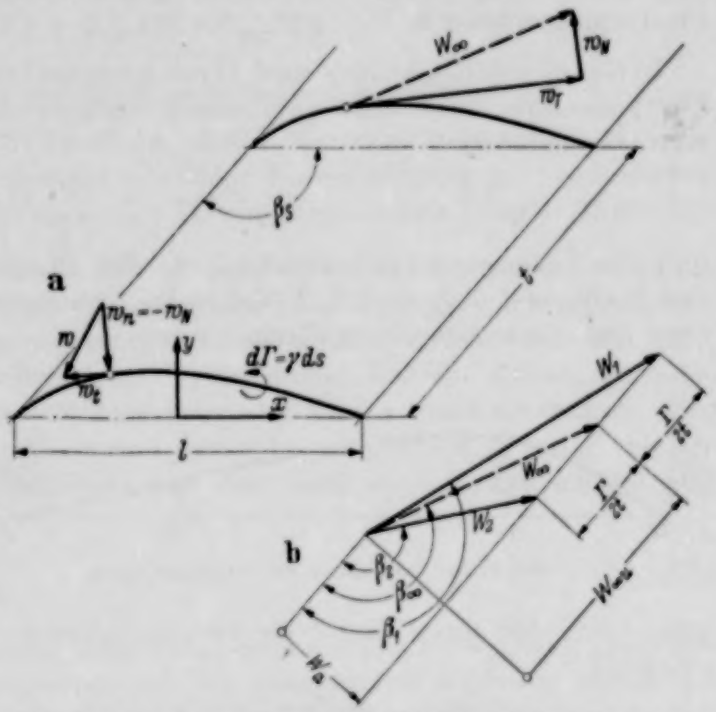


Abb. 1a u. b. Anstrom-, Störgeschwindigkeiten und Geschwindigkeitsdreiecke am Gitter aus gewölbten Profilen.

$$W_K = w_T + w_t \,. \tag{1}$$

Wir machen die Schaufelkoordinaten x in und y_s senkrecht zur Sehnenrichtung mit der Sehnenlänge l dimensionslos:

$$\frac{2x}{l} = \xi \,, \qquad \frac{2y_s}{l} = \eta_s \,.$$

Ursprung ist die Sehnenmitte; Vorder- und Hinterkante liegen dann bei $\xi = \mp 1$, $\eta_s = 0$. Für mäßig gewölbte Schaufeln $\eta_s\langle\xi\rangle$, deren Sehne mit der Gitterfront den Winkel β_S einschließt, ist

$$\left.\begin{aligned} w_N &= W_a\left(\cos\beta_S - \frac{d\eta_s}{d\xi}\sin\beta_S\right) + W_{\infty u}\left(\sin\beta_S + \frac{d\eta_s}{d\xi}\cos\beta_S\right), \\ w_T &= W_a\left(\sin\beta_S + \frac{d\eta_s}{d\xi}\cos\beta_S\right) - W_{\infty u}\left(\cos\beta_S - \frac{d\eta_s}{d\xi}\sin\beta_S\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wenn wir voraussetzen, daß das Profil durch den Potenzansatz dritten Grades

$$\eta_s = A + B\,\xi + A\,\xi^2 - B\,\xi^3 \tag{3}$$

gut darstellbar ist (A ist für die Wölbung, B für den S-Schlag maßgebend)[2], folgt ein Normalgeschwindigkeitsverlauf vom zweiten Grade

$$w_n = -w_N = W_a\,(G_{0a} + G_{1a}\,\xi + G_{2a}\,\xi^2) + W_{\infty u}\,(G_{0u} + G_{1u}\,\xi + G_{2u}\,\xi^2)\,, \tag{4}$$

[1] $\langle\cdots\rangle$ bedeutet: Funktion von ...

[2] A und B lassen sich entweder aus den Endneigungen gegen die Sehne oder aus zwei Ordinaten, z. B. bei 25 und 75% der Schaufeltiefe bestimmen (Abb. 2):

$$4\,A = \left(\frac{d\eta_s}{d\xi}\right)_V - \left(\frac{d\eta_s}{d\xi}\right)_H, \qquad 4\,B = -\left(\frac{d\eta_s}{d\xi}\right)_V - \left(\frac{d\eta_s}{d\xi}\right)_H, \tag{3a}$$

$$\frac{3}{2}A = (\eta_s)_{0,5} + (\eta_s)_{-0,5}, \qquad \frac{3}{4}B = (\eta_s)_{0,5} - (\eta_s)_{-0,5}\,. \tag{3b}$$

Die Zeiger V, H und später M gelten für Vorder-, Hinterkante und Schaufelmitte.

dessen Faktoren G nur von Profilform und Staffelung des Gitters abhängen:

$$\left.\begin{aligned} G_{0o} &= B\sin\beta_S - \cos\beta_S, & G_{0u} &= -B\cos\beta_S - \sin\beta_S,\\ G_{1o} &= -2A\sin\beta_S, & G_{1u} &= 2A\cos\beta_S,\\ G_{2o} &= -3B\sin\beta_S, & G_{2u} &= 3B\cos\beta_S. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Als Zusammenhang zwischen den so gegebenen Normalgeschwindigkeiten w_n und den gesuchten Tangentialgeschwindigkeiten w_t der Störströmung wird der Zusammenhang zwischen den Aufwärtsgeschwindigkeiten v und den Längsgeschwindigkeiten u des von den Profilsehnen gebildeten Plattengitters benutzt.

b) Geschwindigkeits- und Druckverteilung, Schaufelkraft und Umlenkwirkung. Für konstante, linear und parabolisch verlaufende, mit dem Hinterkantenwert normierte Aufwärtsgeschwindigkeiten

$$\frac{v_0}{v_{0H}} \equiv 1, \qquad \frac{v_1}{v_{1H}} \equiv \xi, \qquad \frac{v_2}{v_{2H}} \equiv \xi^2 \tag{6}$$

sind die Längsgeschwindigkeitsverläufe für Plattengitter verschiedener Teilungsverhältnisse t/l und Staffelwinkel β_S in Ziff. 7 (Tab. 1 bis 5) mitgeteilt; sie seien nach den Exponenten als nullte, erste und zweite Grundverteilung

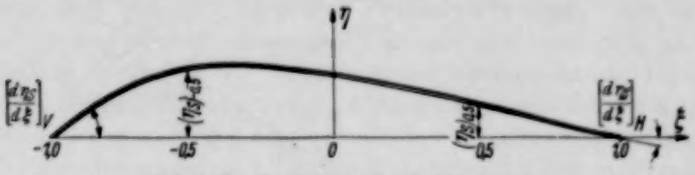


Abb. 2. Zur Bestimmung der Profilkonstanten.

$$u_0^* \equiv \frac{u_0}{v_{0H}}\left\langle \xi, \frac{t}{l}, \beta_S \right\rangle,$$

$$u_1^* \equiv \frac{u_1}{v_{0H}}\left\langle \xi, \frac{t}{l}, \beta_S \right\rangle,$$

$$u_2^* \equiv \frac{u_2}{v_{0H}}\left\langle \xi, \frac{t}{l}, \beta_S \right\rangle$$

bezeichnet. Mit ihnen lautet die Geschwindigkeitsverteilung an der Kontur der dünnen Gitterschaufel:

$$\begin{aligned} W_K = {} & W_o\left(G_{0o}u_0^* + G_{1o}u_1^* + G_{2o}u_2^* + \sin\beta_S + \frac{d\eta_s}{d\xi}\cos\beta_S\right)\\ & + W_{\infty u}\left(G_{0u}u_0^* + G_{1u}u_1^* + G_{2u}u_2^* - \cos\beta_S + \frac{d\eta_s}{d\xi}\sin\beta_S\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Die Druckverteilung folgt aus ihr nach der *Bernoulli*gleichung

$$p + \frac{\varrho}{2}W_K^2 = \text{konst.}, \tag{8}$$

wo ϱ die Dichte des strömenden Mediums ist. Die Schaufelzirkulation setzt sich aus den ebenfalls tabellierten Zirkulationen

$$\Gamma_0^* \equiv \frac{\Gamma_0}{l\,v_{0H}}, \qquad \Gamma_1^* \equiv \frac{\Gamma_1}{l\,v_{1H}}, \qquad \Gamma_2^* \equiv \frac{\Gamma_2}{l\,v_{2H}}$$

der einzelnen Grundverteilungen zusammen:

$$\Gamma = l\,W_o\,(G_{0o}\,\Gamma_0^* + G_{1o}\,\Gamma_1^* + G_{2o}\,\Gamma_2^*) + l\,W_{\infty u}\,(G_{0u}\,\Gamma_0^* + G_{1u}\,\Gamma_1^* + G_{2u}\,\Gamma_2^*). \tag{9}$$

Damit beträgt nach dem *Kutta-Joukowsky*schen Satz die senkrecht zu W_∞ gerichtete Schaufelkraft

$$P = \varrho\,W_\infty\,\Gamma. \tag{10}$$

Die Geschwindigkeiten W_1 weit vor und W_2 weit hinter dem Gitter sind von der Geschwindigkeit W_∞ durch den Zusatz $\mp\,\Gamma/2t$ in Gitterrichtung unterschieden (Abb. 1b).

c) Stoßfreier Anstrom. In wirklicher Strömung zeichnet sich der Fall stoßfreien Eintritts durch geringe Verluste aus. Er liegt beim unendlich dünnen Profil dann vor, wenn die Geschwindigkeiten an der Vorderkante endlich bleiben, d. h. wenn sich die unendlich großen Geschwindigkeiten der nullten Grundverteilung und die der zweiten Grundverteilung gegenseitig aufheben. Vom Verfasser[1] ist gezeigt worden, daß sich die zweite Grundverteilung aus einem Anteil ohne Gesamtzirkulation mit endlicher Vorderkantengeschwindigkeit[2] und einem Anteil $(\Gamma_2^*/\Gamma_0^*)\,u_0^*$ der nullten Grundverteilung zusammensetzt, der für die Zirkulation Γ_2 aufkommt[3]. Damit folgt aus (9)

[1] *H. Krüger*, Ein Verfahren zur Druckverteilungsrechnung an geraden und radialen Schaufelgittern. Bericht 56/B/10 des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung, Göttingen.

[2] Bei *Birnbaum* ist dieser Anteil als Normalverteilung angegeben.

[3] Der wichtige Quotient Γ_2^*/Γ_0^* ist bei *Klingemann* (Fußnote 1 von Seite 254 mit S bezeichnet).

nach Weglassen der an der Vorderkante endlichen Glieder die Bedingung für stoßfreien Anstrom:

$$W_{o\,stfr.}\,(G_{0o}\,\Gamma_0^* + G_{2o}\,\Gamma_2^*) + W_{\infty\,u\,stfr.}\,(G_{0u}\,\Gamma_0^* + G_{2u}\,\Gamma_2^*) = 0\,. \tag{11}$$

d) Bezugnahme auf die Zuströmung. In praktischen Aufgaben ist gewöhnlich die Zuströmung W_1 mit den Komponenten $W_o = W_1 \sin\beta_1$, $W_{1u} = -W_1\cos\beta_1$ vorgegeben. Aus den Geschwindigkeitsdreiecken ergibt sich daraus für W_∞ die Komponente in Gitterrichtung

$$W_{\infty\,u} = \frac{2\,\frac{t}{l}\,W_{1u} + W_o\,(G_{0o}\,\Gamma_0^* + G_{1o}\,\Gamma_1^* + G_{2o}\,\Gamma_2^*)}{2\,\frac{t}{l} - (G_{0u}\,\Gamma_0^* + G_{1u}\,\Gamma_1^* + G_{2u}\,\Gamma_2^*)}\,. \tag{12}$$

(Die Komponente senkrecht zum Gitter bleibt aus Kontinuitätsgründen ungeändert.)

e) Staffelungseinfluß bei gewölbten Schaufeln. Beim Plattengitter mit $\beta_S = 90°$ und $\beta_S = 180°$ betragen ebenso wie bei der Einzelplatte die von einer Wirbelbelegung $\gamma\langle x\rangle$ induzierten Längsgeschwindigkeiten an Ober- und Unterseite $u_{\substack{ob\\un}} = \mp\,\gamma/2$, und die mittlere Längsgeschwindigkeit auf der Kontur ist Null, was anschaulich aus der Symmetrie der Profilanordnungen und damit auch der Störströmungen folgt. Beim gestaffelten Plattengitter ist die mittlere Längsgeschwindigkeit $\bar u = \frac{1}{2}\,(u_{ob} + u_{un})$ von Null verschieden, wie man z. B. aus Abb. 6 ersieht. Sie wird, da $\bar u$ an der Einzelplatte verschwindet, von den Belegungen der anderen Schaufeln, des sogenannten Restgitters, induziert und ändert sich in nächster Umgebung der Platte nicht wesentlich. Ein an die Stelle der Platte gebrachtes dünnes, gewölbtes und durchlässiges Profil $\eta_s\langle\xi\rangle$ wird von der Störströmung des aus Platten bestehenden Restgitters mit den Geschwindigkeiten normal und tangential zur Kontur durchsetzt:

$$w'_N = -\,\bar u\,\frac{d\eta_s}{d\xi}\,, \qquad w'_T = \bar u\,. \tag{13}$$

Während die Tangentialkomponenten gegenüber dem Fall verschwindender Wölbung praktisch ungeändert bleiben, werden die Normalkomponenten w_N des ungestörten Anstroms durch die Induktion des gestaffelten Restgitters in Verbindung mit der Profilwölbung um den (gewöhnlich kleinen) Zusatz w'_N vermehrt, der durch eine aus unseren Grundverteilungen aufgebaute zusätzliche Wirbelbelegung abgesättigt werden muß. Dazu wird w'_N mit Hilfe der Konstanten A, B und der tabellierten $\bar u$-Werte an Vorder-, Hinterkante und in Profilmitte durch einen Ausdruck vom zweiten Grade angenähert:

$$w'_n = -\,w'_N = W_o\,(G'_{0o} + G'_{1o}\,\xi + G'_{2o}\,\xi^2) + W_{\infty u}\,(G'_{0u} + G'_{1u}\,\xi + G'_{2u}\,\xi^2)\,. \tag{14}$$

Die Koeffizienten G' sind durch die Gittergeometrie vollständig bestimmt; sie lauten

$$\left.\begin{aligned}
G'_{0o} &= G_{0o}\,\bar u^*_{0M}\,B + G_{1o}\,\bar u^*_{1M}\,B + G_{2o}\,\bar u^*_{2M}\,B\,,\\
G'_{1o} &= -\,G_{0o}\,[\bar u^*_{0H}\,(A+B) + \bar u^*_{0V}\,(A-B)] - G_{1o}\,[\bar u^*_{1H}\,(A+B) + \bar u^*_{1V}\,(A-B)]\\
&\qquad - G_{2o}\,[\bar u^*_{2H}\,(A+B) + \bar u^*_{2V}\,(A-B)]\,,\\
G'_{2o} &= G_{0o}\,[\bar u^*_{0V}\,(A-B) - \bar u^*_{0M}\,B - \bar u^*_{0H}\,(A+B)] + G_{1o}\,[\bar u^*_{1V}\,(A-B) - \bar u^*_{1M}\,B - \bar u^*_{1H}\,(A+B)]\\
&\qquad + G_{2o}\,[\bar u^*_{2V}\,(A-B) - \bar u^*_{2M}\,B - \bar u^*_{2H}\,(A+B)]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Zur Bestimmung von G'_{0u}, G'_{1u}, G'_{2u} ist der Zeiger o durch u zu ersetzen. In den Gleichungen (7) für die Konturgeschwindigkeit, (9) für die Schaufelzirkulation und (11) für den stoßfreien Anstrom ist zur Berücksichtigung des Staffelungseinflusses lediglich $G_0 + G'_0$, $G_1 + G'_1$, $G_2 + G'_2$ anstelle von G_0, G_1, G_2 zu schreiben.

3. Radiale Gitter. a) Konforme Abbildung eines radialen auf ein gerades Gitter, geometrische und Geschwindigkeitszusammenhänge. Ein in einer $\tau(= r\,e^{i\sigma})$-Ebene konzentrisch zum Ursprung liegendes n-schaufliges Kreisgitter mit den Innen- und Außenradien r_V, r_H und dem mittleren Halbmesser $r_M = \sqrt{r_V\,r_H}$ wird durch die konforme Abbildung

$$z\,e^{i\beta_S} = \frac{i\,n\,t}{2\,\pi}\ln\frac{\tau}{r_M} \tag{16}$$

in ein gerades Gitter der Teilung t mit dem Schaufelwinkel β_S in einer $z(=x+iy)$-Ebene überführt (Abb. 3). Insbesondere gehen über:

1. die Kreise vom Halbmesser r_V, r_M, r_H in die Geraden in Gitterrichtung durch Vorderkante, Sehnenmitte und Hinterkante,

2. logarithmisch-spiralige Schaufeln mit dem Neigungswinkel β_S gegen Umfangsrichtung in Plattenprofile der Neigung β_S gegen die Gitterachse,

3. der Radmittelpunkt $\tau = 0$ und das unendlich Ferne $\tau = \infty$ in die unendlich fernen Punkte $z = \mp\infty$ beiderseits des geraden Gitters.

Eine von der logarithmisch-spiraligen abweichende dünne Schaufel sei gegeben durch das Halbmesserverhältnis r_H/r_V, die Winkeldifferenz $\sigma_H - \sigma_V$ der Fahrstrahlen zur Aus- und Eintrittskante und den Verlauf der Neigungswinkel β_τ der Kontur gegen die Umfangsrichtung mit den Endwerten β_V, β_H. Die Vorder- und Hinterkante verbindende logarithmische Spirale wird zu einer Platte im geraden Gitter vom Teilungsverhältnis

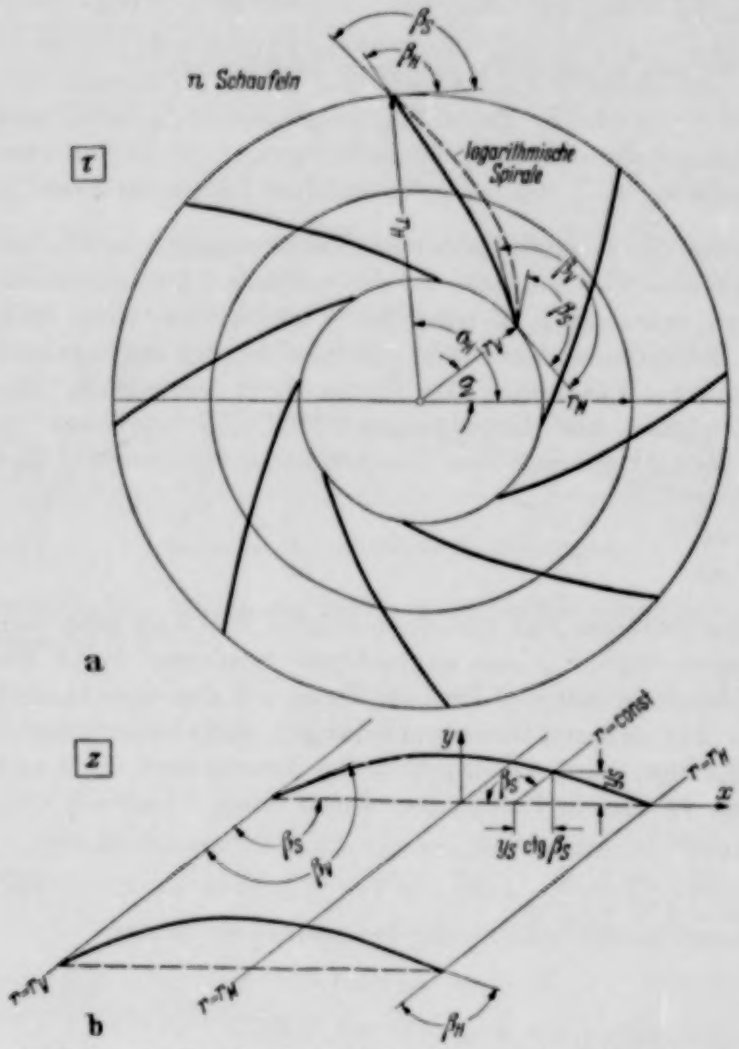


Abb. 3a u. b. Transformation des Kreisgitters in ein gerades Gitter durch $z\, e^{i\beta_S} = \frac{i\,n\,t}{2\pi} \ln \frac{\tau}{r_M}$

$$\frac{t}{l} = \frac{2\pi}{n \sqrt{[\ln (r_H/r_V)]^2 + (\sigma_H - \sigma_V)^2}} \tag{17}$$

mit dem Schaufelwinkel

$$\beta_S = -\operatorname{arc\,ctg} \frac{\sigma_H - \sigma_V}{\ln (r_H/r_V)}\,. \tag{18}$$

Das Schaufelbild wölbt sich über dieser Sehne mit den Anfangs- und Endtangenten

$$\frac{d\eta_s}{d\xi} = \beta_V - \beta_S\,, \qquad \frac{d\eta_s}{d\xi} = \beta_H - \beta_S\,, \tag{19}$$

wird also durch Gleichung (3) angenähert mit

$$\begin{aligned} 4\,A &= \beta_V - \beta_H\,, \\ 4\,B &= 2\,\beta_S - \beta_V - \beta_H\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Ein Punkt der logarithmischen Spirale mit dem Abstand r vom Ursprung hängt mit dem entsprechenden Plattenpunkt zusammen durch

$$\frac{r}{r_M} = \left(\frac{r_H}{r_V}\right)^{\frac{\xi}{2}}. \tag{21}$$

Bei einer Kreisgitterschaufel, die nur die Enden mit der logarithmisch-spiraligen gemeinsam hat, ist der Zusammenhang komplizierter, weil nicht Punkte mit gleichem Radius, sondern mit kürzestem Abstand einander zugeordnet sein sollen. In der z-Ebene liegen zugeordnete Punkte von Sehne und Schaufelbild senkrecht zur Sehne übereinander, während die Linien konstanter Radien die Richtung der Gitterachse haben. Eine solche Linie durch den Punkt (x, y_s) der Bildschaufel schneidet die Sehne im Punkt $x + y_s \operatorname{ctg} \beta_S$ (Abb. 3b). Für stark von $\pi/2$ abweichende Schaufelwinkel ist die Abszissenverschiebung $y_s \operatorname{ctg} \beta_S$ auch bei geringen Abweichungen der Schaufel von der logarithmischen Spirale beträchtlich. An Stelle von (21) tritt der allgemeine Zusammenhang

$$\frac{r}{r_M} = \left(\frac{r_H}{r_V}\right)^{\frac{1}{2}\left[\xi + \operatorname{ctg}\beta_S (A + B\,\xi - A\,\xi^2 - B\,\xi^3)\right]}. \tag{22}$$

Für die Übertragung der Schaufelgeschwindigkeiten ist der Abbildungsmaßstab an der Kontur maßgebend:

$$w_z = w_\tau \left|\frac{d\tau}{dz}\right|_K = w_\tau \frac{2\pi r}{n\,t}\,. \tag{23}$$

b) Geschwindigkeitsverteilung beim Anstrom aus einer Wirbelquelle. Durch die Transformation (16) geht die ungestörte Strömung einer im Ursprung der τ-Ebene gelegenen Wirbelquelle der Ergiebigkeit E und der Wirbelstärke Γ_∞ in eine Parallelströmung in der z-Ebene mit den Komponenten $W_s = E/n\,t$, $W_{\infty u} = \Gamma_\infty/n\,t$ über. Der Geschwindigkeitsverlauf (7) an

der Bildschaufel wird mit (23) auf die Kreisgitterschaufel übertragen:

$$W_K = \frac{E}{2\pi r_M}\frac{r_M}{r}(G_{0a}u_0^* + G_{1a}u_1^* + G_{2a}u_2^* + \sin\beta_r) + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi r_M}\frac{r_M}{r}(G_{0u}u_0^* + G_{1u}u_1^* + G_{2u}u_2^* - \cos\beta_r)\,. \tag{24}$$

Die Schaufelzirkulation bleibt von der Transformation unberührt, beträgt also

$$\Gamma_s = \frac{E}{n}\frac{l}{t}(G_{0a}\Gamma_0^* + G_{1a}\Gamma_1^* + G_{2a}\Gamma_2^*) + \frac{\Gamma_\infty}{n}\frac{l}{t}(G_{0u}\Gamma_0^* + G_{1u}\Gamma_1^* + G_{2u}\Gamma_2^*)\,. \tag{25}$$

c) Rotierende Radialgitter. Beim mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit umlaufenden Radialgitter kreist die ungestörte relative Anströmung (Schaufeln durchlässig gedacht) als starre Scheibe mit $-\omega$ um den Radmittelpunkt. Die Normalkomponenten können wir, um die Schaufeln zu Stromlinien der Relativströmung zu machen, mit Hilfe von Wirbelbelegungen kompensieren. Das von ihnen induzierte Störfeld, dessen Geschwindigkeiten an der in Drehrichtung vorangehenden Schaufelseite von dieser weg, an der anderen auf sie zu gerichtet sind, ist identisch mit dem Absolutstrombild, einer Momentaufnahme des instationären Vorgangs.

Überträgt man die Normalkomponenten $w_N = -r\,\omega\sin\beta_r$ der ungestörten Anströmung auf das gerade Gitter, so erhält man mit (22) und (23) die quadratische, an Schaufelmitte und -enden genau gültige Näherung für die zu erzeugenden Aufwärtsgeschwindigkeiten (als charakteristische Größe wird entsprechend E und Γ_∞ das mit der Umfangsgeschwindigkeit im Radius r_M gebildete Linienintegral benutzt):

$$w_n = \frac{2\pi r_M^2\,\omega}{n\,t}(G_{0\omega} + G_{1\omega}\xi + G_{2\omega}\xi^2) \tag{26}$$

mit den durch Gittergeometrie und Profilform bestimmten Konstanten

$$\left.\begin{aligned} G_{0\omega} &= \left(\frac{r_H}{r_V}\right)^{\frac{1}{4}(\beta_V-\beta_H)\operatorname{ctg}\beta_r}\sin\frac{1}{4}(6\beta_S-\beta_V-\beta_H)\,,\\ 2G_{1\omega} &= \frac{r_H}{r_V}\sin\beta_H - \frac{r_V}{r_H}\sin\beta_V\,,\\ 2G_{2\omega} &= \frac{r_H}{r_V}\sin\beta_H + \frac{r_V}{r_H}\sin\beta_V - 2G_{0\omega}\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung an der Schaufel, die im allgemeinen Fall zu (24) hinzuzufügen ist, lautet

$$W_{K\omega} = r_M\,\omega\frac{r_M}{r}\left[G_{0\omega}u_0^* + G_{1\omega}u_1^* + G_{2\omega}u_2^* + \left(\frac{r}{r_M}\right)^2\cos\beta_r\right]; \tag{28}$$

die Schaufelzirkulation beträgt für den Rotationsanteil der Strömung

$$\Gamma_\omega = \frac{2\pi r_M\,\omega}{n}\frac{l}{t}(G_{0\omega}\Gamma_0^* + G_{1\omega}\Gamma_1^* + G_{2\omega}\Gamma_2^*)\,. \tag{29}$$

d) Druckverteilung, Kraft- und Umlenkwirkung eines rotierenden, aus einer Wirbelquelle angeströmten Kreisgitters. An die Stelle der *Bernoulli*gleichung tritt im rotierenden System die Energiegleichung der Relativströmung

$$p + \frac{\varrho}{2}[W_K^2 - (r\,\omega)^2] = \text{konst.} \tag{30}$$

Drehmoment M und theoretische Förderhöhe H_{id} folgen aus der Schaufelzirkulation und der Quellstärke bzw. der Drehgeschwindigkeit zu

$$M = \varrho\frac{E}{2\pi}n\,\Gamma\,, \tag{31}$$

$$H_{id} = \frac{\omega}{2\pi g}n\,\Gamma\,. \tag{32}$$

Der Drall wird durch das Gitter vom Eintrittswert Γ_1 auf den Austrittswert Γ_2 geändert gemäß

$$\Gamma_{1,2} = \Gamma_\infty \mp \frac{n\,\Gamma}{2}\,. \tag{33}$$

e) **Stoßfreier Anstrom.** Analog (11) müssen bei stoßfreiem Eintritt Quellstärke, Wirbelstärke und Winkelgeschwindigkeit der Bedingung genügen

$$E_{stfr.}\,(G_{0a}\,\Gamma_0^* + G_{2a}\,\Gamma_2^*) + \Gamma_{\infty\,stfr.}\,(G_{0u}\,\Gamma_0^* + G_{2u}\,\Gamma_2^*) + 2\,\pi\,r_M^2\,\omega_{stfr.}\,(G_{0\infty}\,\Gamma_0^* + G_{2\infty}\,\Gamma_2^*) = 0\,. \quad (34)$$

f) **Bezugnahme auf die Zuströmung.** Aus den gewöhnlich vorgegebenen Größen E, Γ_1, ω berechnet sich mit (33) die Drallkomponente der ungestörten Anströmung zu

$$\Gamma_\infty = \frac{E\,(G_{0a}\,\Gamma_0^* + G_{1a}\,\Gamma_1^* + G_{2a}\,\Gamma_2^*) + \Gamma_1\,\frac{2\,t}{l} + 2\,\pi\,r_M^2\,\omega\,(G_{0\infty}\,\Gamma_0^* + G_{1\infty}\,\Gamma_1^* + G_{2\infty}\,\Gamma_2^*)}{\frac{2\,t}{l} - (G_{0u}\,\Gamma_0^* + G_{1u}\,\Gamma_1^* + G_{2u}\,\Gamma_2^*)}\,. \quad (35)$$

E und ω bleiben ungeändert.

g) **Staffelungseinfluß.** Bei größeren Abweichungen von der logarithmisch-spiraligen Schaufelform macht sich der unter **2** e) beschriebene Einfluß der Staffelung geltend. Man hat dann die Konstanten G_a, G_u, G_∞ in den Gleichungen für Konturgeschwindigkeit, Schaufelzirkulation und stoßfreien Anstrom durch die korrigierten Werte $G_a + G'_a$, $G_u + G'_u$, $G_\infty + G'_\infty$ zu ersetzen. G'_u und G'_∞ folgen aus (15), wenn statt des Fußzeichens a u bzw. ω geschrieben wird.

4. Berechnungsbeispiele. a) **Gerades Gitter, Vergleich mit vorliegenden theoretischen Ergebnissen.** In Abb. 4 ist ein gerades Gitter $t/l = 1{,}0$, $\beta_S = 135°$ aus dünnen Schaufeln der

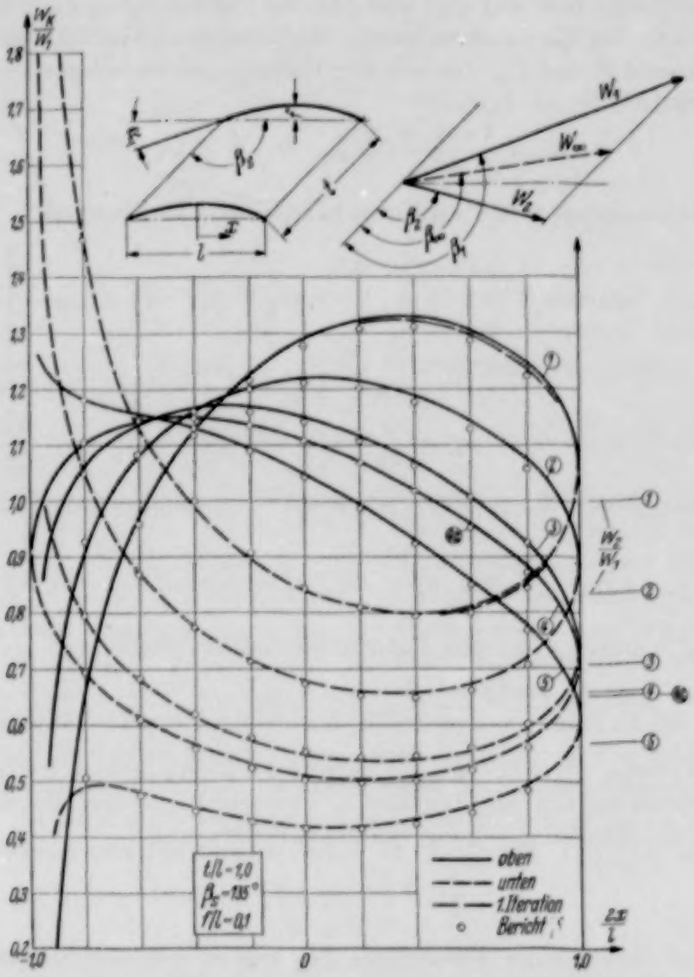


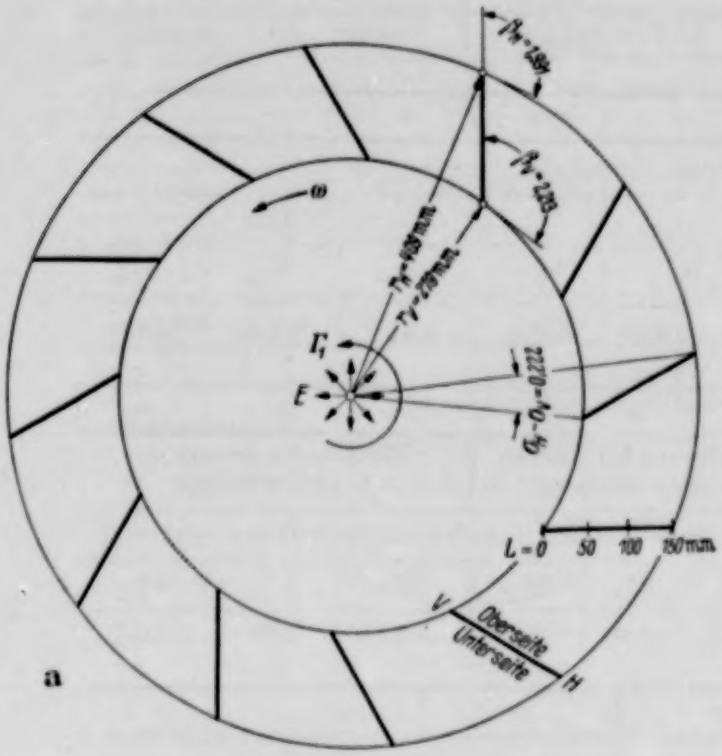
Abb. 4. Geschwindigkeiten am Parabelgitter, Vergleich mit *Truckenbrodt**.

	c_a	$c_a{}^*$	α_1	$\alpha_1{}^*$	β_1	$\beta_1{}^*$	β_2	$\beta_2{}^*$	β_∞	$\beta_\infty{}^*$	
1	0	0	—13,6	—13,6	121,4	121,4	121,4	121,4	121,4	121,4	
2	0,591	0,586	0,1	0	135,1	135,0	121,8	121,9	129,0	129,0	
3	1,0	1,0	8,2	8,2	143,2	143,2	122,4	122,4	134,7	134,7	
4	1,151	—	11,0	—	146,0	—	122,8	—	136,8	—	stoßfrei
4a	—	1,174	—	11,3	—	146,3	—	122,6	—	136,9	stoßfrei
5	1,510	1,5	16,9	16,7	151,9	151,7	123,0	123,1	141,4	141,4	

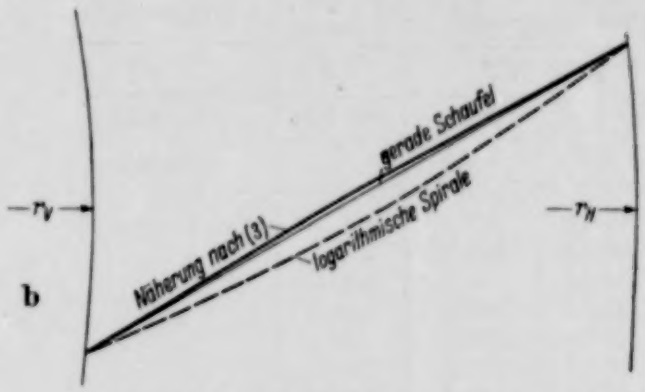
(Alle Winkelangaben in Grad)

* Bei dem zum Vergleich herangezogenen Bericht handelt es sich um die in Fußnote 1 auf S. 249 angeführte Arbeit.

Form $\eta = 0{,}2(1-\xi^2)$ mit seinen Geschwindigkeitsverteilungen skizziert. Kreise bezeichnen Resultate nach dem *Schlichting*schen Verfahren, die von *Truckenbrodt*[1] mitgeteilt sind; die Kurven sind für jeweils gleiche W_∞ und β_∞ nach unserem Verfahren berechnet. Der Staffelungseinfluß muß berücksichtigt werden; die durch ihn bedingten Zusatzgeschwindigkeiten betragen maximal 8% der Zuströmgeschwindigkeit. Die Übereinstimmung ist gut. Eine Vergleichstabelle zeigt weitgehendes Übereinstimmen auch der übrigen aerodynamischen Parameter. Dabei ist zu bedenken, daß beide Näherungsverfahren das Problem von verschiedenen Seiten angreifen: bei *Schlichting*[2] wird die Wirbelbelegung γ, hier der Aufwindverlauf v aus einfachen Funktionen aufgebaut.

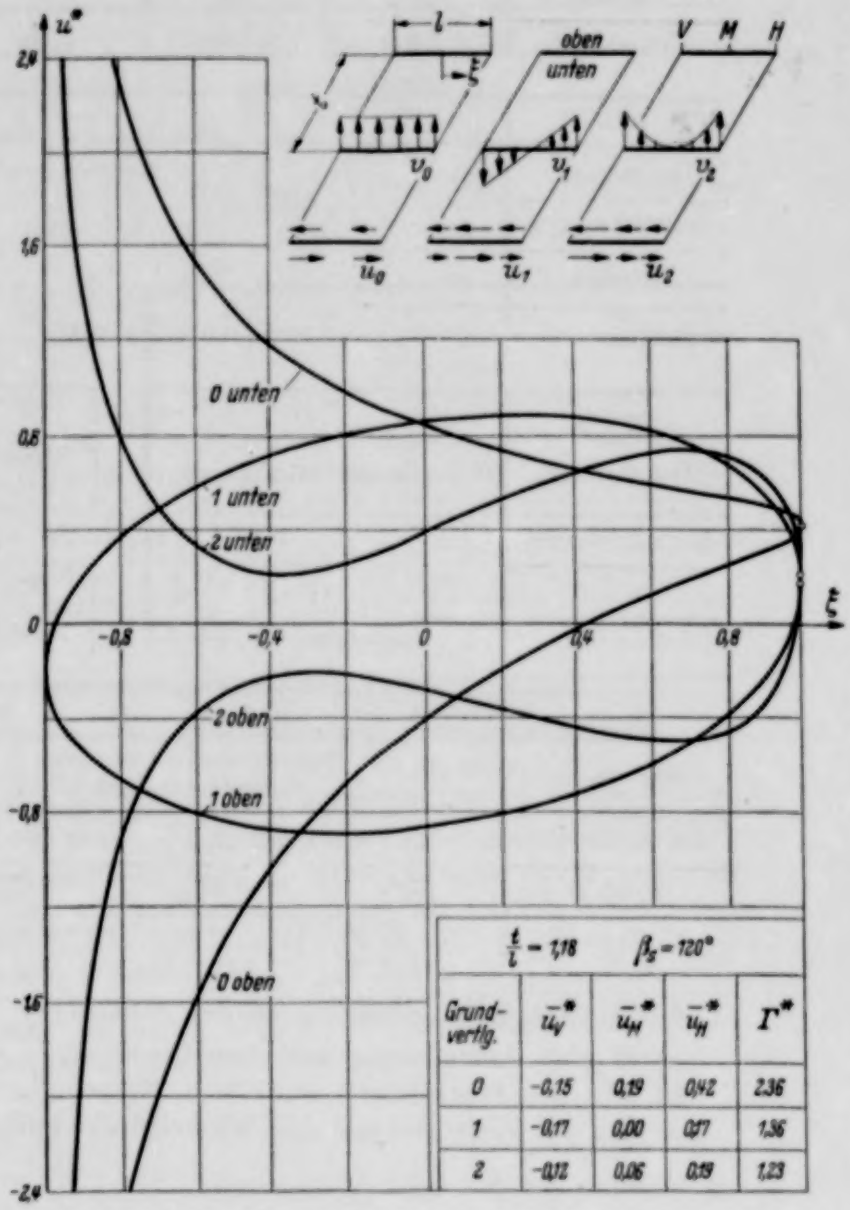


a



b

Abb. 5a u. b. Radialgitter aus geraden dünnen Schaufeln; Annäherung der Schaufelform nach Gleichung (3).



$\frac{t}{l} = 1{,}18$		$\beta_S = 120°$		
Grundverlg.	$\bar{u}_V^*$	$\bar{u}_M^*$	$\bar{u}_H^*$	Γ^*
0	-0,15	0,19	0,42	2,36
1	-0,17	0,00	0,17	1,36
2	-0,12	0,06	0,19	1,23

Abb. 6. Grundverteilungen, Mittelwerte und Zirkulationsbeiwerte für $t/l = 1{,}18$, $\beta_S = 120°$.

Die den Staffelungseinfluß löschende zusätzliche Wirbelbelegung gilt genau nur für gerade Skelettlinien. An einem gewölbten Skelett erzeugt sie außer den gewünschten neue, durch die Konturneigung gegen die Sehne bedingte Normalgeschwindigkeiten. Genau genommen sind daher iterativ weitere Zusatzbelegungen aufzubringen, doch erweist sich schon die erste als praktisch bedeutungslos. Für $c_a = 0$ ist die hierdurch bewirkte Änderung der Geschwindigkeitsverteilung mit eingetragen; sie macht maximal 1% der Zuströmgeschwindigkeit aus.

b) Radialgitter, durchgerechnetes Beispiel. Vorgegeben ist ein Radialgitter aus dünnen, geradlinigen Schaufeln nach Abb. 5: Schaufelzahl $n = 12$, Außenhalbmesser $r_H = 409$ mm, Innenhalbmesser $r_V = 279$ mm, Winkeldifferenz zwischen Hinter- und Vorderkante $\sigma_H - \sigma_V = 0{,}222$. Gesucht ist:

[1] *E. Truckenbrodt*, Bericht S 52/18 des Lehrstuhls für Strömungsmechanik der TH Braunschweig.
[2] Siehe Fußnote 2 von Seite 242.

Tabelle 1a. *Rechnungsgang für ein Radialgitter*

Spalte	1	2	3	4	5	6
Benennung	Halbmesserverhältnis	Mittelhalbmesser	Teilung des zugehörigen geraden Gitters	Schaufelwinkel des zugehörigen geraden Gitters	Profilkonstanten: Wölbung	Profilkonstanten: S-Schlag
berechnet aus	r_H/r_V	$\sqrt{r_V r_H}$	(17)	(18)	(20)	
Zeichen	r_H/r_V	r_M	t/l	β_S	A	B
Zahlenwert	1,465	337 mm	1,182	120,0°	0,0555	0,0038

Spalte	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Benennung	Koeffizienten der Grundverteilungen								
berechnet aus	(5)						(27)		
Zeichen	G_{0a}	G_{1a}	G_{2a}	G_{0u}	G_{1u}	G_{2u}	$G_{0\omega}$	$G_{1\omega}$	$G_{2\omega}$
Zahlenwert	0,497	−0,096	0,010	−0,868	−0,056	0,006	0,857	0,395	0,084

Spalte	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Benennung	Grundverteilungen			Mittelwerte der nullten Grundverteilung			Mittelwerte der ersten Grundverteilung		
berechnet aus	für $t/l = 1{,}182$; $\beta_S = 120{,}0°$ aus den Tabellen interpoliert								
Zeichen	$u_0^*\langle\xi\rangle$	$u_1^*\langle\xi\rangle$	$u_2^*\langle\xi\rangle$	$\overline{u}_{0V}^*$	$\overline{u}_{0M}^*$	$\overline{u}_{0H}^*$	$\overline{u}_{1V}^*$	$\overline{u}_{1M}^*$	$\overline{u}_{1H}^*$
Zahlenwert	Auftragung in Abb. 6			−0,15	0,19	0,42	−0,17	0,00	0,17

Spalte	25	26	27	28	29	30
Benennung	Mittelwerte der zweiten Grundverteilung			Zirkulationsbeiwerte der Grundverteilungen		
berechnet aus	aus den Tabellen interpoliert					
Zeichen	$\overline{u}_{2V}^*$	$\overline{u}_{2M}^*$	$\overline{u}_{2H}^*$	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
Zahlenwert	−0,12	0,06	0,19	2,36	1,36	1,23

1. Geschwindigkeitsverteilung an der Schaufel
   a) W_E bei Anströmung aus einer Quelle E,
   b) W_{Γ_1} bei Anströmung aus einem Wirbel Γ_1,
   c) W_ω bei Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω,

2. Summe der Schaufelzirkulationen
   a) $n\,\Gamma_E$ bei Anströmung aus einer Quelle E,
   b) $n\,\Gamma_{\Gamma_1}$ bei Anströmung aus einem Wirbel Γ_1,
   c) $n\,\Gamma_\omega$ bei Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Tab. 1 gibt zusammen mit Abb. 6 (interpolierte Grundverteilungen) und Abb. 7 (Geschwindigkeiten an der Schaufel) den Rechnungsgang wieder. Um zu zeigen, inwieweit der geradlinige Schaufelverlauf durch Gleichung (3) angenähert wird, ist in Abb. 5b die danach berechnete Schaufelform gezeichnet.

5. Vergleich mit Versuchsergebnissen. In einem Versuchsstand, der die Verwirklichung der ebenen Strömung zuließ[1], wurden u. a. die Druckverteilungen an einem dem Berechnungsbeispiel entsprechenden Radialgitter (Abb. 8) beim Anstrom aus einer Wirbelquelle gemessen. Abweichend von 4 b) waren die Schaufeln nicht Platten, sondern symmetrische verallgemeinerte *Joukowsky*-Profile[2] mit 10,4% Dicke und 31% Dickenrücklage. Bei Berechnung der theoretischen Druck-

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 244.
[2] *A. Betz*, Eine Verallgemeinerung der *Joukowsky*schen Flügelabbildung. ZFW 15 (1924) S. 10.

Tabelle 1b. *Rechnungsgang für ein Radialgitter* (Fortsetzung)

Spalte	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Benennung	Zusatzkoeffizienten der Grundverteilungen zur Berücksichtigung des Staffelungseinflusses								
berechnet aus	(15)								
Zeichen	G'_{0a}	G'_{1a}	G'_{2a}	G'_{0u}	G'_{1u}	G'_{2u}	$G'_{0\omega}$	$G'_{1\omega}$	$G'_{2\omega}$
Zahlenwert	—0,000	—0,006	—0,013	0,001	0,011	0,027	—0,001	—0,011	—0,035

Spalte	40	41	42	43	44	45	46	47	48
Benennung	korrigierte Koeffizienten der Grundverteilungen								
berechnet aus	Spalte 7 plus Spalte 31 usf.								
Zeichen	$G_{0a}+G'_{0a}$	$G_{1a}+G'_{1a}$	$G_{2a}+G'_{2a}$	$G_{0u}+G'_{0u}$	$G_{1u}+G'_{1u}$	$G_{2u}+G'_{2u}$	$G_{0\omega}+G'_{0\omega}$	$G_{1\omega}+G'_{1\omega}$	$G_{2\omega}+G'_{2\omega}$
Zahlenwert	0,497	—0,102	—0,003	—0,867	—0,045	0,033	0,856	0,384	0,049

Spalte	49	50	51	52	53	54
Benennung	Drallkomponente der ungestörten Anströmung			Ergebnis: Summe der Schaufelzirkulationen		
	Quellanstrom ($\Gamma_1=\omega=0$)	Drallanstrom ($E=\omega=0$)	Rotation ($E=\Gamma_1=0$)	Quellanstrom ($\Gamma_1=\omega=0$)	Drallanstrom ($E=\omega=0$)	Rotation ($E=\Gamma_1=0$)
berechnet aus	(35)			(33)		
Zeichen	Γ_∞/E	Γ_∞/Γ_1	$\Gamma_\infty/2\pi r_M^2\omega$	$n\,\Gamma/E$	$n\,\Gamma/\Gamma_1$	$n\,\Gamma/2\pi r_M^2\omega$
Zahlenwert	0,232	0,534	0,588	0,464	0,932	1,176

Spalte	55	56	57	58	59	60	61	62
Benennung	Lauflänge am geraden Gitter	zugehöriger Halbmesser der Radialgitterschaufel	Lauflänge	örtlicher Schaufelwinkel		Ergebnis: Geschwindigkeiten am Radialgitter		
						Quellanstrom ($\Gamma_1=\omega=0$)	Drallanstrom ($E=\omega=0$)	Rotation ($E=\Gamma_1=0$)
berechnet aus	gewählt	(22)	Gittergeometrie			(24)		(28)
Zeichen	ξ	r/r_M	X/L	$\sin\beta_r$	$-\cos\beta_r$	$2\pi r_M W_E/E$	$2\pi r_M W_{\Gamma_1}/\Gamma_1$	$W_\omega/r_M\omega$
Zahlenwert	—1,0	0,826	0,000	0,802	0,598	Auftragung in Abb. 7		
	—0,8	0,855	0,080	0,816	0,578			
	—0,6	0,885	0,164	0,830	0,558			
	—0,4	0,919	0,255	0,844	0,538			
	—0,2	0,953	0,346	0,856	0,518			
	—0,0	0,990	0,444	0,867	0,499			
	0,2	1,030	0,545	0,877	0,479			
	0,4	1,070	0,647	0,887	0,461			
	0,6	1,114	0,760	0,896	0,444			
	0,8	1,160	0,876	0,904	0,426			
	1,0	1,210	1,000	0,912	0,408			

verteilung wurde der Dickeneinfluß in vereinfachender Weise nach der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt und der Geschwindigkeitsabfall an den Staupunkten durch den *Riegels*faktor[1] dargestellt

$$\frac{W_{Profil}}{W_{Platte}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(dD/dL)^2}}\,\frac{t_\sigma}{t_\sigma - D_\sigma}, \tag{36}$$

wo D die Schaufeldicke, L die Lauflänge ab Vorderkante, t_σ die Umfangsteilung und D_σ die Schaufeldicke in Umfangsrichtung bedeutet.

[1] *F. W. Riegels*, Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen, I. und II. Mitteilung. Ing.-Arch. 16 (1948) S. 373 und 17 (1949) S. 94 sowie 18 (1950) S. 359.

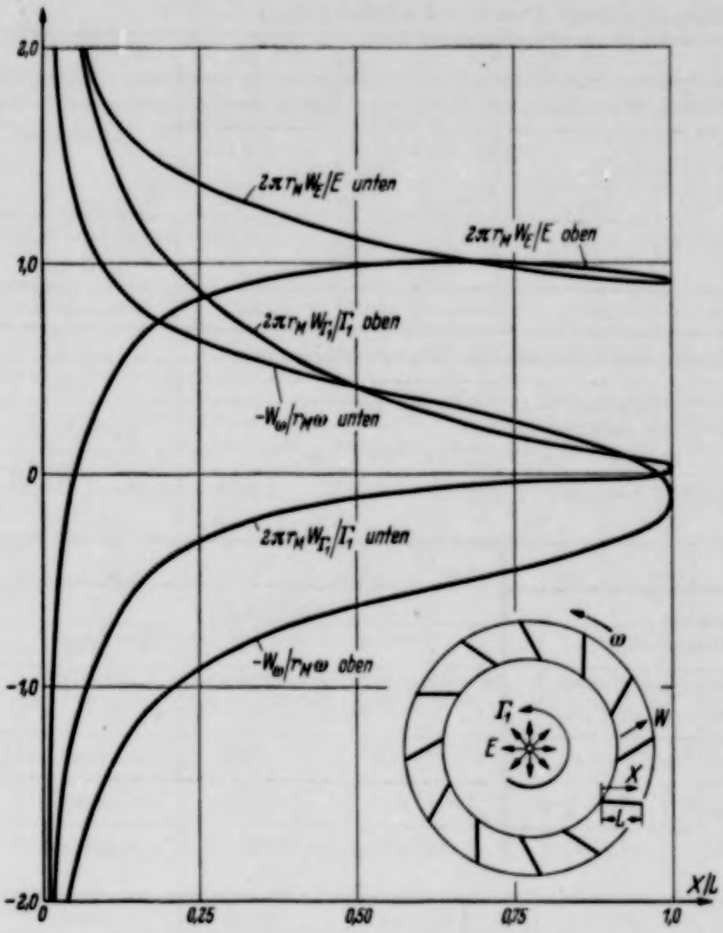


Abb. 7. Geschwindigkeiten am Radialgitter von Abb. 5.

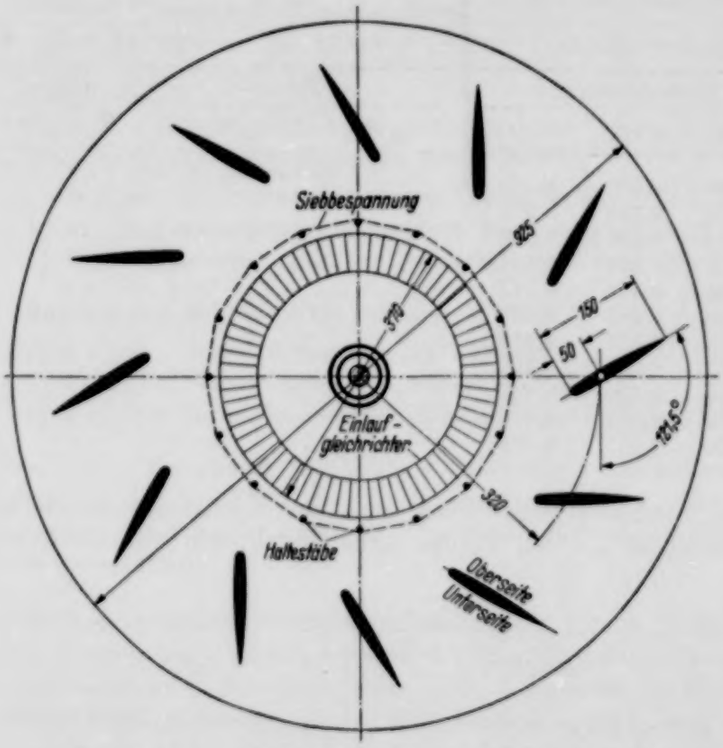


Abb. 8. Ausgeführtes Radialgitter mit geraden profilierten Schaufeln (Maße in mm).

Aufgetragen wurde die Druckdifferenz gegen den bei ungestörter Quellströmung im Halbmesser r_M herrschenden Wert, dimensionslos gemacht mit dem Staudruck

$$\tfrac{1}{2}\varrho\,(E/2\pi r_M)^2$$

der ungestörten Quellströmung im Halbmesser r_M. Abb. 9 zeigt den Fall stoßfreien Anstroms, einen Fall mit kleinerem und einen mit größerem Eintrittsdrall. Die gerechneten Druckverteilungen sind für Platten gestrichelt, für die profilierten Schaufeln ausgezogen. Punkte stellen Meßwerte dar. Der tatsächliche Druckverlauf — auch seine Überschneidung bei kleinem Eintrittsdrall — wird durch die Rechnung richtig wiedergegeben. Für die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung ist die vereinfachte Abschätzung des relativ großen Dickeneinflusses, eine Formungenauigkeit an der Schaufelnase und die auch mit der Fadensonde festgestellte Grenzschichtablösung im hinteren Profildrittel verantwortlich.

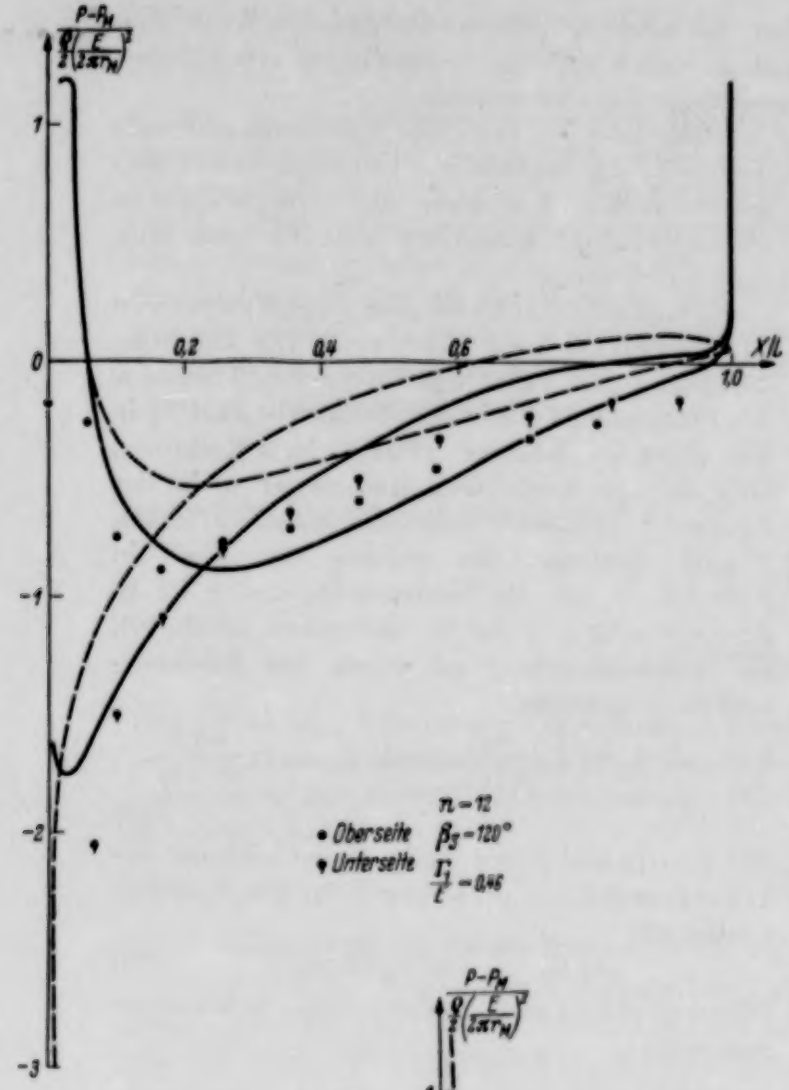
6. Die Grundverteilungen. a) Zur Berechnung der Grundverteilungen. Die durchlässig gedachten Schaufeln eines ebenen, geraden Plattengitters kann man mit einer an der Hinterkante verschwindenden Wirbelverteilung so belegen, daß die induzierten Aufwärtsgeschwindigkeiten v mit der n-ten Potenz der von Plattenmitte aus gerechneten Lauflänge gehen. Der zugehörige Längsgeschwindigkeitsverlauf u_n wird als n-te Grundverteilung bezeichnet; nullte, erste und zweite Grundverteilung sind für verschiedene Teilungen und Staffelungen in den Tabellen 1 bis 5 von Ziff. 7 mitgeteilt.

Zu ihrer Berechnung wurde das Plattengitter mit der *Weinig*schen Abbildung[1]

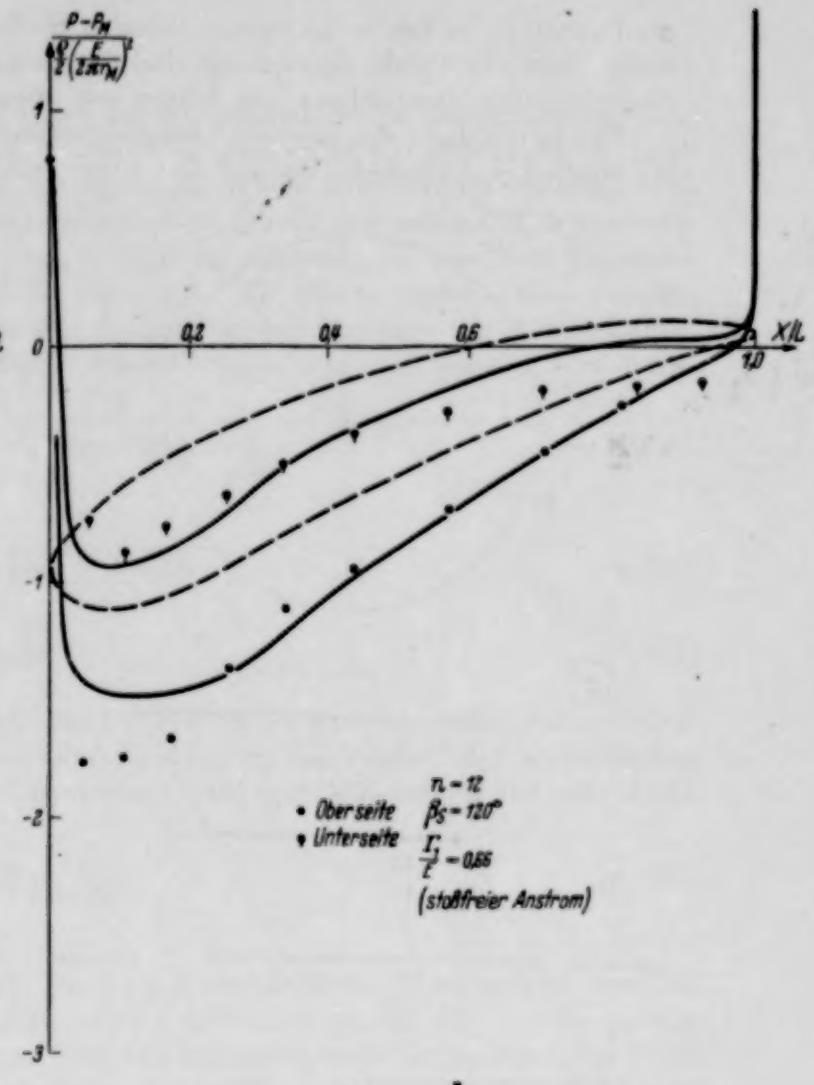
$$\frac{\pi z}{i t} = e^{-i\beta_S}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{Z}{a}\,e^{-\nu_0}\right) - e^{i\beta_S}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{Z}{a}\,e^{\nu_0}\right) \qquad (37)$$

auf den Kreis transformiert (Bezeichnungen folgen in b)). Betrachtet man die komplexe Geschwindigkeit $u - i\,v$

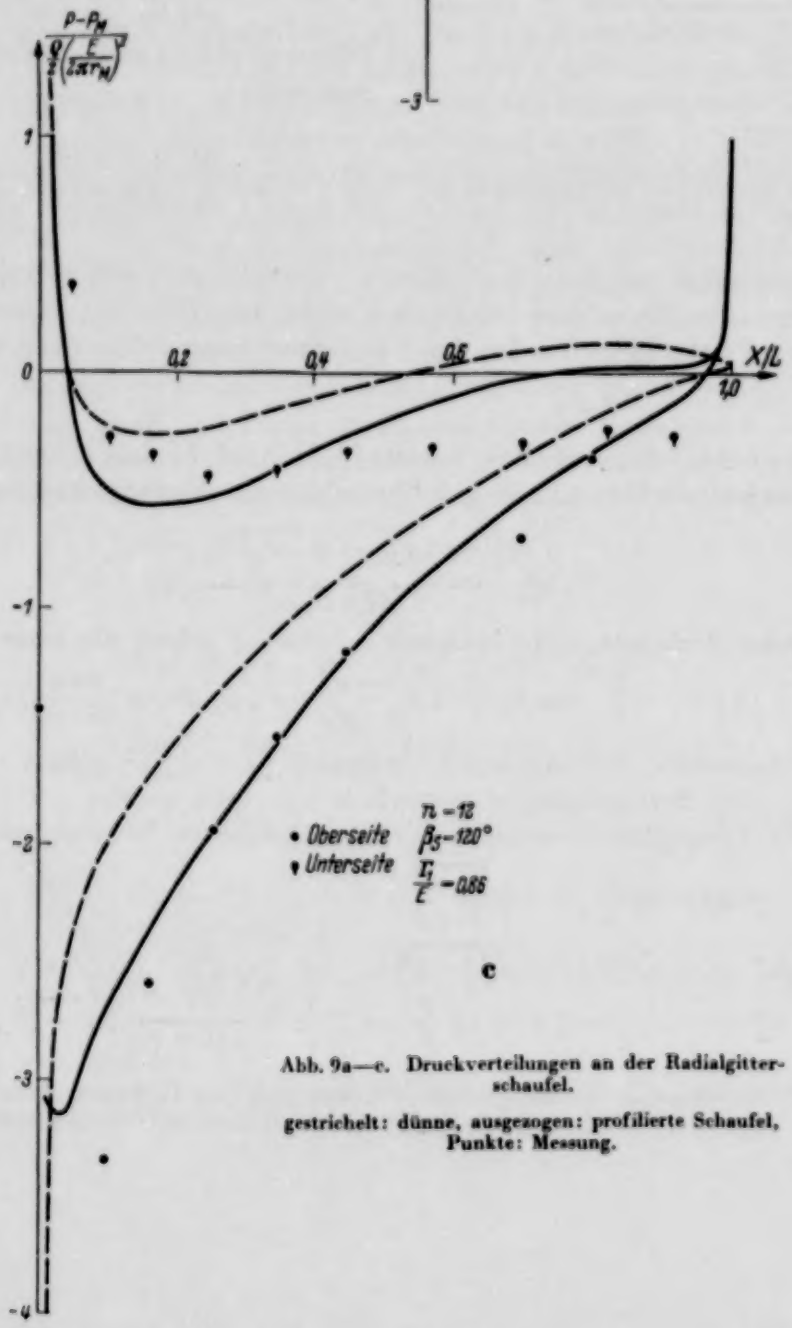
[1] *F. Weinig*, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen, Leipzig 1935.



a



b



c

Abb. 9a—c. Druckverteilungen an der Radialgitterschaufel.

gestrichelt: dünne, ausgezogen: profilierte Schaufel, Punkte: Messung.

als Potential, so hat es an entsprechenden Stellen von Kreis und Platte den gleichen Wert. Für nullte und erste Grundverteilung sind die Potentiale durch einfache Anordnungen symbolischer Singularitäten darstellbar[1] und führen auf übersichtliche Zusammenhänge.

Zur Ermittlung der zweiten Grundverteilung wurden die v mit Hilfe des Abbildungsmaßstabs als Radialgeschwindigkeiten auf den Kreis transformiert; die zugehörigen Umfangsgeschwindigkeiten werden aus ihnen mit dem bekannten *Poisson*integral[2] numerisch berechnet und dann zurückübertragen.

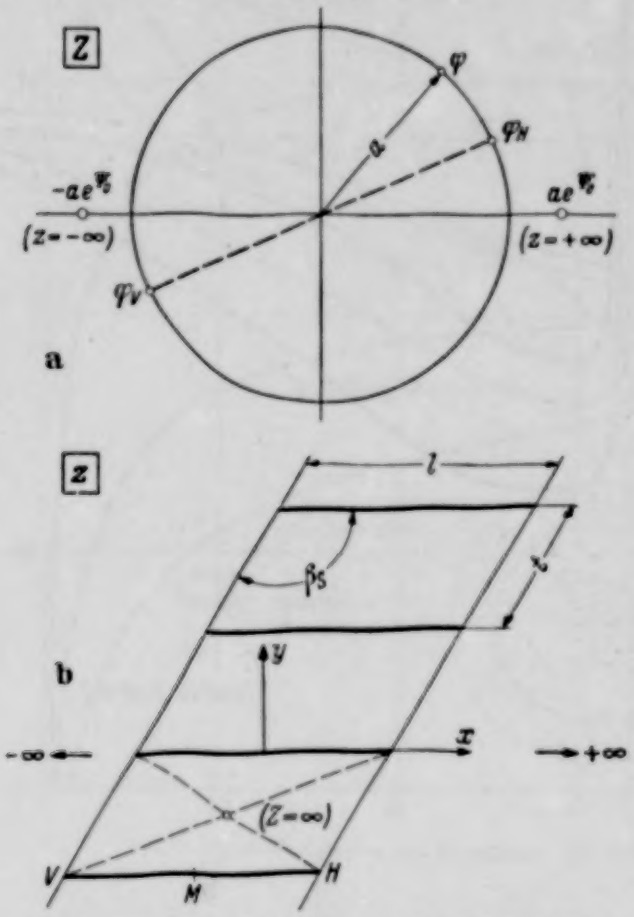


Abb. 10a u. b. Konforme Abbildung des Streckenprofilgitters auf den Einheitskreis.

b) Geometrische Beziehungen zwischen Plattengitter und Bildkreis. Die konforme Abbildung (37) führt das Gitter der Teilung t, der Plattenlänge l mit dem Schaufelwinkel β_S in der $z(=x+iy)$-Ebene (Platte in x-Richtung) über in den Kreis vom Halbmesser a in der $Z(=a\,e^{\nu+i\varphi})$-Ebene, wobei die unendlich fernen Punkte beidseits des Gitters $z=\mp\infty$ in $Z=\mp a\,e^{i\varphi_0}$ und die Plattenenden $z=\mp l/2$ in $Z=\mp a\,e^{i\varphi_H}=\mp a\,e^{i\varphi_V}$ übergehen (Abb. 10). Ein Schaufelpunkt x ist durch den Bildkreiswinkel φ bestimmt:

$$\frac{\pi x}{t}=\sin\beta_S\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{\cos\varphi}{\mathfrak{Cof}\,\varphi_0}-\cos\beta_S\,\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{Sin}\,\varphi_0}. \tag{38}$$

Mit $x=l/2$ und $\varphi=\varphi_H$ gibt diese Gleichung das Teilungsverhältnis an, während für den Schaufelwinkel gilt

$$\operatorname{ctg}\beta_S=-\operatorname{tg}\varphi_H\,\mathfrak{Ctg}\,\varphi_0. \tag{39}$$

Differentiation von (37) führt auf den Abbildungsmaßstab

$$\frac{2\pi a}{t}\left|\frac{dz}{dZ}\right|_K=\frac{\pi l}{t}\frac{d\xi}{d\varphi}$$

$$=-4\,\frac{\cos\beta_S\,\mathfrak{Sin}\,\varphi_0\cos\varphi+\sin\beta_S\,\mathfrak{Cof}\,\varphi_0\sin\varphi}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_0-\cos 2\varphi}, \tag{40}$$

mit dem ein Plattenelement $|dz|=dx$ in ein Konturelement $|dZ|=a\,d\varphi$ des Kreises überführt wird.

Beim Übergang zum Einzelprofil ($t/l\to\infty$) wird aus (37) die *Joukowsky*sche Abbildung $z=Z+a^2/Z$ mit der Plattenlänge $l=4a$, der Punktzuordnung $2x/l=\cos\varphi$ und dem Abbildungsmaßstab $\frac{2a}{l}\left|\frac{dz}{dZ}\right|_K=\frac{d\xi}{d\varphi}=-\sin\varphi$.

c) Die Grundverteilungen, ihre Grenzfälle und Zirkulationsbeiwerte. Zu konstanter Aufwärtsgeschwindigkeit $v_0\equiv v_{0H}$ gehört die nullte Grundverteilung

$$u_0^*=\frac{\sin 2\varphi_H-\operatorname{tg}\frac{\varphi-\varphi_H}{2}}{\mathfrak{Sin}\,2\varphi_0}. \tag{41}$$

Zu linear verlaufender Aufwärtsgeschwindigkeit $v_1=v_{1H}\,\xi$ gehört die erste Grundverteilung

$$u_1^*=-\frac{2t}{\pi l}\left(\cos\beta_S\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{\cos\varphi}{\mathfrak{Cof}\,\varphi_0}+\sin\beta_S\,\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{\mathfrak{Sin}\,\varphi_0}\right). \tag{42}$$

Zu parabolisch verlaufender Aufwärtsgeschwindigkeit $v_2=v_{2H}\,\xi^2$ gehört die zweite Grundverteilung u_2^*, die mit dem *Poisson*integral numerisch berechnet wurde.

Im Grenzfall der Einzelplatte entstehen die *Birnbaum*schen Normalverteilungen

$$\left.\begin{aligned} u_0^*&=-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\mp\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}},\\ u_1^*&=-\sin\varphi=\mp\sqrt{1-\xi^2},\\ u_2^*&=-\frac{1}{2}\left(\sin 2\varphi+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)=\mp\left[\xi+\frac{1}{2(1+\xi)}\right]\sqrt{1-\xi^2}\,; \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

[1] *W. Klingemann*, Berechnung der theoretischen Kennlinien von Turbomaschinen. Ing.-Arch. 11 (1940) S.151. [2] *A. Betz*, Konforme Abbildung, Berlin 1948.

bei sehr dicht stehenden Gittern erhält man

$$u_0^* = -\operatorname{ctg}\beta_S\,, \qquad u_1^* = -\xi\operatorname{ctg}\beta_S\,, \qquad u_2^* = -\xi^2\operatorname{ctg}\beta_S\,. \tag{44}$$

Aus der Betrachtung des unendlich dichten Gitters als Wirbelband mit in Gitterrichtung konstanter Intensität — bei ihm fallen die induzierten Geschwindigkeiten in Gitterrichtung — folgt auch anschaulich $u = -v\operatorname{ctg}\beta_S$. Wie die in Abb. 6 aufgetragenen Grundverteilungen zeigen, wird der Charakter der bekannten *Birnbaum*verteilungen beibehalten. Durch den unter Ziff. 5 beschriebenen Restgittereinfluß ist der Mittelwert $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_{ob} + u_{un})$ im allgemeinen von Null verschieden, insbesondere ist an der Hinterkante $\bar{u} > 0$ für $\beta_S > \pi/2$. Mit abnehmender Teilung rückt, wie ein Vergleich zeigt, der Wirbelschwerpunkt der nullten Grundverteilung zur Vorderkante.

Die bekannten Zirkulationsbeiwerte für die Einzelplatte mit konstanter, linearer und parabolischer Aufwärtsgeschwindigkeit

$$\Gamma_0^* = \pi\,, \qquad \Gamma_1^* = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \Gamma_2^* = \frac{\pi}{2} \tag{45}$$

werden im Gitterfall abgeändert auf

$$\Gamma_0^* = \frac{t}{l}\,\frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{Sin} 2\varphi_0}\,\sqrt{\operatorname{Cof} 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_H}\,, \tag{46}$$

$$\Gamma_1^* = \left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{4}{\pi}\ln \operatorname{Ctg}\varphi_0\,. \tag{47}$$

Für Γ_2^* ist von *Klingemann*[1] eine Reihenentwicklung angegeben worden; in vorliegender Arbeit ergaben sich die Zahlenwerte Γ_2^* aus der Hinterkantenbedingung im Verlauf der numerischen Berechnung der zweiten Grundverteilung. Die Gleichungen (46) und (47) lauten für sehr dicht stehende Schaufeln

$$\Gamma_0^* = \Gamma_1^*\,\frac{2t}{l\sin\beta_S}\,. \tag{48}$$

Nach *Klingemann* gilt dieser Wert auch für Γ_2^*.

d) Tabellen. Die in Ziff. 7 mitgeteilten Tabellen 1 bis 5 enthalten für Plattengitter der Teilungen $t/l = 0{,}5;\ 1{,}0;\ 2{,}0;\ \infty$ und Schaufelwinkel $\beta_S = 90°;\ 120°;\ 135°;\ 150°;\ 180°$ — die φ_0 und φ_H sind unten links angegeben — in Spalte 1 den vom Hinterkantenpunkt ab gerechneten Bildkreiswinkel $\varphi - \varphi_H$, in Spalte 2 die zugehörige Lauflänge ξ aus (38), in Spalte 3 den Abbildungsmaßstab (40), der zwar für das vorliegende Berechnungsverfahren nicht benötigt wird, aber für die Behandlung anderer Gitterprobleme nützlich ist; in den Spalten 4, 5 und 6 die nullte, erste und zweite Grundverteilung mit ihren Mittelwerten an den Plattenenden und in Plattenmitte und den Zirkulationsbeiwerten nach 6c). Die Grundverteilungen sind überall dort anwendbar, wo zu analytischen Funktionen mit konstant, linear und quadratisch am Streckenprofilgitter verlaufendem Real- bzw. Imaginärteil der andere Teil gesucht ist, z. B. bei der Erzeugung dicker Profilkonturen aus dem Plattengitter durch Verschiebungsvektoren, deren Komponenten in und senkrecht zur Plattenrichtung Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen der Gitterebene sind[2]. Hierzu geeignete Tabellen, die außer den behandelten auch die nullte und zweite Grundverteilung bei verschwindender Gesamtzirkulation umfassen, siehe Fußnote 1 von Seite 244. Es gelten folgende Symmetrien:

$$\varphi_0\left\langle \frac{t}{l};\ \beta_S \right\rangle = \varphi_0\left\langle \frac{t}{l};\ \pi - \beta_S \right\rangle, \tag{49}$$

$$\varphi_H\left\langle \frac{t}{l};\ \beta_S \right\rangle = -\varphi_H\left\langle \frac{t}{l};\ \pi - \beta_S \right\rangle, \tag{50}$$

$$\xi\left\langle \frac{t}{l};\ \beta_S;\ \varphi - \varphi_H \right\rangle = \xi\left\langle \frac{t}{l};\ \pi - \beta_S;\ 2\pi - (\varphi - \varphi_H) \right\rangle, \tag{51}$$

$$\left|\frac{d\xi}{d\varphi}\right|_K\left\langle \frac{t}{l};\ \beta_S;\ \varphi - \varphi_H \right\rangle = \left|\frac{d\xi}{d\varphi}\right|_K\left\langle \frac{t}{l};\ \pi - \beta_S;\ 2\pi - (\varphi - \varphi_H) \right\rangle, \tag{52}$$

$$u^*\left\langle \frac{t}{l};\ \beta_S;\ \varphi - \varphi_H \right\rangle = -u^*\left\langle \frac{t}{l};\ \pi - \beta_S;\ 2\pi - (\varphi - \varphi_H) \right\rangle, \tag{53}$$

$$\Gamma^*\left\langle \frac{t}{l};\ \beta_S;\ \varphi - \varphi_H \right\rangle = -\Gamma^*\left\langle \frac{t}{l};\ \pi - \beta_S;\ 2\pi - (\varphi - \varphi_H) \right\rangle. \tag{54}$$

---

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 254.

[2] *H. Krüger*, Ein Typ von dicken Gitterprofilen mit leicht berechenbarem Geschwindigkeitsverlauf. Bericht 55/B/28 des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung, Göttingen.

7. Tabellen

Tabelle 1 a. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi - \varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{t}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1.0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9691	−11,6150	−0,0038	−0,2513	−0,2793
10	0,7399	−9,2648	−0,0076	−0,3530	−0,4510
15	0,6291	−6,9784	−0,0113	−0,3974	−0,4809
20	0,5431	−5,5169	−0,0152	−0,4212	−0,4032
30	0,4149	−3,8980	−0,0232	−0,4456	−0,3222
40	0,3193	−3,0672	−0,0315	−0,4574	−0,2696
50	0,2415	−2,5875	−0,0403	−0,4642	−0,2176
60	0,1740	−2,2950	−0,0499	−0,4685	−0,1761
70	0,1129	−2,1184	−0,0605	−0,4708	−0,1360
80	0,0556	−2,0229	−0,0725	−0,4721	−0,0978
90	0,0000	−1,0925	−0,0865	−0,4725	−0,0613
100	−0,0556	−2,0229	−0,1030	−0,4721	−0,0266
110	−0,1129	−2,1184	−0,1235	−0,4708	0,0055
120	−0,1740	−2,2950	−0,1497	−0,4685	0,0346
130	−0,2415	−2,5875	−0,1854	−0,4642	0,0575
140	−0,3193	−3,0672	−0,2375	−0,4574	0,0789
150	−0,4149	−3,8980	−0,3227	−0,4456	0,0769
160	−0,5431	−5,5169	−0,4903	−0,4112	0,0447
165	−0,6291	−6,9784	−0,6567	−0,3974	0,0072
170	−0,7399	−9,2648	−0,9882	−0,3530	−0,2552
175	−0,9691	−11,6150	−1,9801	−0,2513	−1,1277
180	−1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞
185	−0,9691	11,6150	1,9801	0,2513	1,1277
190	−0,7399	9,2648	0,9882	0,3530	0,2552
195	−0,6291	6,9784	0,6567	0,3974	−0,0072
200	−0,5431	5,5169	0,4903	0,4212	−0,0447
210	−0,4149	3,8980	0,3227	0,4456	−0,0769
220	−0,3193	3,0672	0,2375	0,4574	−0,0789
230	−0,2415	2,5875	0,1854	0,1642	−0,0575
240	−0,1740	2,2950	0,1497	0,4685	−0,0346
250	−0,1129	2,1184	0,1235	0,4708	−0,0055
260	−0,0556	2,0229	0,1030	0,4721	0,0266
270	0,0000	1,0925	0,0865	0,4725	0,0613
280	0,0556	2,0229	0,0725	0,4721	0,0978
290	0,1129	2,1184	0,0605	0,4708	0,1360
300	0,1740	2,2950	0,0499	0,4685	0,1761
310	0,2415	2,5875	0,0403	0,4642	0,2176
320	0,3193	3,0672	0,0315	0,4574	0,2696
330	0,4149	3,8980	0,0232	0,4456	0,3222
340	0,5431	5,5169	0,0152	0,4212	0,4032
345	0,6291	6,9784	0,0113	0,3974	0,4809
350	0,7399	9,2648	0,0076	0,3530	0,4510
355	0,9691	11,6150	0,0038	0,2513	0,2793
360	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$\frac{t}{l} = 0{,}5$

$\beta_S = 90°$

$\varphi_0 = 0{,}0864$

$\varphi_H = 0$

	$\bar{u}_0^*$	$\bar{u}_1^*$	$\bar{u}_2^*$
V	0,0000	0,0000	0,0000
M	0,0000	0,0000	0,0000
H	0,0000	0,0000	0,0000
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	0,9983	0,7804	0,7080

Tabelle 1b. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi - \varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,5744	0,3855	0,3856
5	0,9120	—7,9672	0,5710	0,1218	—0,0454
10	0,8118	—6,3311	0,5670	—0,0019	—0,1462
15	0,7338	—4,9935	0,5630	—0,0767	—0,2082
20	0,6710	—4,1002	0,5598	—0,1294	—0,2188
30	0,5735	—3,0405	0,5518	—0,2032	—0,1996
40	0,4978	—2,4662	0,5438	—0,2558	—0,1995
50	0,4344	—2,1255	0,5358	—0,2975	—0,1805
60	0,3785	—1,9176	0,5261	—0,3329	—0,1593
70	0,3271	—1,7954	0,5165	—0,3644	—0,1379
80	0,2782	—1,7364	0,5045	—0,3936	—0,1145
90	0,2302	—1,7321	0,4917	—0,4216	—0,0919
100	0,1816	—1,7820	0,4757	—0,4493	—0,0654
110	0,1345	—1,8881	0,4565	—0,4750	—0,0367
120	0,0757	—2,0824	0,4308	—0,5067	—0,0094
130	0,0139	—2,3964	0,3972	—0,5386	0,0149
140	—0,0593	—2,9215	0,3468	—0,5745	0,0560
150	—0,1524	—3,8843	0,2659	—0,6168	0,1009
160	—0,2855	—6,0255	0,1057	—0,6689	0,1180
165	—0,3833	—8,3194	—0,0553	—0,6990	0,1156
170	—0,5277	—13,1120	—0,3788	—0,7265	0,0191
175	—0,7929	—20,7755	—1,3238	—0,6739	—0,5274
180	—1,0000	0,0000	∞	—0,3855	∞
185	—0,9120	7,9672	2,4722	—0,1218	1,2310
190	—0,8118	6,3311	1,5192	0,0019	0,4930
195	—0,7338	4,9935	1,2037	0,0767	0,2220
200	—0,6710	4,1002	1,0427	0,1294	0,1054
210	—0,5735	3,0405	0,8825	0,2032	0,0225
220	—0,4978	2,4662	0,8016	0,2558	—0,0264
230	—0,4344	2,1255	0,7520	0,2975	—0,0353
240	—0,3785	1,9176	0,7175	0,3329	—0,0308
250	—0,3271	1,7954	0,6919	0,3644	—0,0202
260	—0,2782	1,7364	0,6727	0,3936	—0,0016
270	—0,2302	1,7321	0,6567	0,4216	0,0189
280	—0,1816	1,7820	0,6439	0,4493	0,0475
290	—0,1345	1,8881	0,6319	0,4750	0,0811
300	—0,0757	2,0824	0,6222	0,5067	0,1192
310	—0,0139	2,3964	0,6126	0,5386	0,1694
320	0,0593	2,9215	0,6046	0,5745	0,2291
330	0,1524	3,8843	0,5966	0,6168	0,3228
340	0,2855	6,0255	0,5886	0,6689	0,4422
345	0,3833	8,3194	0,5854	0,6990	0,5457
350	0,5277	13,1120	0,5814	0,7265	0,6637
355	0,7929	20,7755	0,5774	0,6739	0,7489
360	1,0000	0,0000	0,5744	0,3855	0,3856

$\frac{t}{l} = 0{,}5$

$\beta_S = 120°$

$\psi_0 = 0{,}0622$

$\varphi_H = 0{,}0359$

	$\bar{u}_0^*$	$\bar{u}_1^*$	$\bar{u}_2^*$
V	—0,2100	—0,3855	—0,2010
M	0,4980	0,0000	0,1143
H	0,5744	0,3855	0,3856
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	1,1523	0,8841	0,7736

Tabelle 1c. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi - \varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{t}{l}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,9975	0,6467	0,5259
5	0,9044	— 7,4429	0,9944	0,3266	0,1095
10	0,8166	— 5,4409	0,9911	0,1871	0,0215
15	0,7505	— 4,1817	0,9880	0,0990	— 0,0863
20	0,6984	— 3,3893	0,9847	0,0348	— 0,1097
30	0,6181	— 2,4971	0,9780	— 0,0581	— 0,1309
40	0,5560	— 2,0206	0,9710	— 0,1266	— 0,1333
50	0,5042	— 1,7399	0,9634	— 0,1822	— 0,1314
60	0,4584	— 1,5678	0,9554	— 0,2301	— 0,1242
70	0,4164	— 1,4676	0,9465	— 0,2735	— 0,1110
80	0,3764	— 1,4198	0,9363	— 0,3141	— 0,0970
90	0,3371	— 1,4160	0,9246	— 0,3535	— 0,0860
100	0,2974	— 1,4564	0,9106	— 0,3930	— 0,0679
110	0,2557	— 1,5427	0,8934	— 0,4336	— 0,0508
120	0,2107	— 1,7057	0,8712	— 0,4771	— 0,0241
130	0,1601	— 1,9651	0,8411	— 0,5249	— 0,0004
140	0,0999	— 2,4026	0,7971	— 0,5805	— 0,0195
150	0,0232	— 3,2126	0,7252	— 0,6489	0,0571
160	— 0,0896	— 5,0060	0,5837	— 0,7358	0,0939
165	— 0,1703	— 7,1247	0,4432	— 0,8055	0,0980
170	— 0,2984	— 12,1712	0,1635	— 0,8887	0,0810
175	— 0,5641	— 31,6412	— 0,6874	— 0,9907	— 0,1932
180	— 1,0000	0,0000	∞	— 0,6467	∞
185	— 0,9044	7,4429	2,6688	— 0,3266	1,1602
190	— 0,8166	5,4409	1,8316	— 0,1871	0,5059
195	— 0,7505	4,1817	1,5519	— 0,0990	0,2675
200	— 0,6984	3,3893	1,4114	— 0,0348	0,1681
210	— 0,6181	2,4971	1,2699	0,0581	0,0523
220	— 0,5560	2,0206	1,1980	0,1266	0,0092
230	— 0,5042	1,7399	1,1540	0,1822	— 0,0118
240	— 0,4584	1,5678	1,1239	0,2301	— 0,0185
250	— 0,4164	1,4676	1,1017	0,2735	— 0,0136
260	— 0,3764	1,4198	1,0845	0,3141	— 0,0040
270	— 0,3371	1,4160	1,0705	0,3535	0,0056
280	— 0,2974	1,4564	1,0587	0,3930	0,0250
290	— 0,2557	1,5427	1,0486	0,4336	0,0467
300	— 0,2107	1,7057	1,0397	0,4771	0,0817
310	— 0,1601	1,9651	1,0316	0,5249	0,1192
320	— 0,0999	2,4026	1,0241	0,5805	0,1620
330	— 0,0232	3,2126	1,0171	0,6489	0,2403
340	0,0896	5,0060	1,0104	0,7358	0,3617
345	0,1703	7,1247	1,0071	0,8045	0,4518
350	0,2984	12,1712	1,0040	0,8887	0,6084
355	0,5641	31,6412	1,0007	0,9907	0,8660
360	1,0000	0,0000	0,9975	0,6467	0,5259

$\frac{t}{l} = 0{,}5$

$\beta_S = 135°$

$\varphi_0 = 0{,}0364$

$\varphi_H = 0{,}0364$

	$\bar{u}_0^*$	$\bar{u}_1^*$	$\bar{u}_2^*$
V	— 0,6000	— 0,6467	— 0,4765
M	0,8590	0,0000	0,1769
H	0,9975	0,6467	0,5259

Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
1,4096	1,0540	0,8845

Tabelle 1d. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi - \varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{t}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	1,7321	1,0659	0,7507
2	0,9450	5,2482	1,7313	0,8954	0,3015
5	0,8678	— 7,5594	1,7303	0,5715	0,1900
10	0,7864	— 4,6491	1,7282	0,4003	0,0554
15	0,7319	— 3,3456	1,7260	0,2945	— 0,0081
20	0,6910	— 2,6306	1,7242	0,2177	— 0,0336
30	0,6299	— 1,9026	1,7198	0,1057	— 0,0485
40	0,5838	— 1,4859	1,7154	0,0230	— 0,0866
50	0,5459	— 1,2636	1,7110	— 0,0444	— 0,0899
60	0,5129	— 1,1295	1,7058	— 0,1027	— 0,0895
70	0,4827	— 1,0496	1,7000	— 0,1555	— 0,0868
80	0,4543	— 1,0089	1,6939	— 0,2051	— 0,0850
90	0,4264	— 1,0005	1,6864	— 0,2534	— 0,0776
100	0,3990	— 1,0231	1,6776	— 0,3020	— 0,0705
110	0,3693	— 1,0804	1,6667	— 0,3518	— 0,0562
120	0,3380	— 1,1825	1,6531	— 0,4054	— 0,0436
130	0,3031	— 1,3509	1,6342	— 0,4647	— 0,0279
140	0,2620	— 1,6329	1,6065	— 0,5338	— 0,0085
150	0,2104	— 2,1456	1,5617	— 0,6198	0,0263
160	0,1377	— 3,2684	1,4730	— 0,7382	0,0724
165	0,0849	— 4,5004	1,3852	— 0,8219	0,0752
170	0,0067	— 7,2482	1,2099	— 0,9408	0,0983
175	— 0,1481	— 18,6268	0,6860	— 1,1494	0,1670
178	— 0,4861	— 7,4878	— 0,8845	— 1,1611	— 0,2012
180	— 1,0000	0,0000	∞	— 1,0659	∞
182	— 0,9450	5,2482	4,3487	— 0,8954	1,6505
185	— 0,8678	7,5594	2,7782	— 0,5715	0,8589
190	— 0,7864	4,6491	2,2543	— 0,4003	0,3266
195	— 0,7319	3,3456	2,0791	— 0,2945	0,1739
200	— 0,6910	2,6306	1,9912	— 0,2177	0,1040
210	— 0,6299	1,9026	1,9025	— 0,1057	0,0456
220	— 0,5838	1,4859	1,8577	— 0,0230	— 0,0132
230	— 0,5459	1,2636	1,8300	0,0444	— 0,0285
240	— 0,5129	1,1295	1,8112	0,1027	— 0,0352
250	— 0,4827	1,0496	1,7975	0,1555	— 0,0366
260	— 0,4543	1,0089	1,7866	0,2051	— 0,0372
270	— 0,4264	1,0005	1,7760	0,2534	— 0,0314
280	— 0,3990	1,0231	1,7703	0,3020	— 0,0227
290	— 0,3693	1,0804	1,7642	0,3518	— 0,0059
300	— 0,3380	1,1825	1,7585	0,4054	0,0107
310	— 0,3031	1,3509	1,7532	0,4647	0,0334
320	— 0,2620	1,6329	1,7488	0,5338	0,0648
330	— 0,2104	2,1456	1,7444	0,6198	0,1215
340	— 0,1377	3,2684	1,7400	0,7382	0,2100
345	— 0,0849	4,5004	1,7383	0,8219	0,2572
350	— 0,0067	7,2482	1,7361	0,9408	0,3695
355	0,1481	18,6268	1,7339	1,1494	0,7071
358	0,4861	7,4878	1,7329	1,1611	1,1478
360	1,0000	0,0000	1,7321	1,0659	0,7507

$\frac{t}{l} = 0{,}5$

$\beta_S = 150°$

$\varphi_0 = 0{,}0119$

$\varphi_H = 0{,}0197$

	$\overline{u}_0^*$	$\overline{u}_1^*$	$\overline{u}_2^*$
V	— 0,9100	— 1,0659	— 0,6110
M	1,4520	0,0000	0,2580
H	1,7321	1,0659	0,7507

Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
1,9999	1,4224	1,0307

Tabelle 2a u. b. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,9482	−1,7276	−0,0331	−0,2420	−0,3021
20	0,8279	−2,4462	−0,0667	−0,4246	−0,4919
30	0,6893	−2,4848	−0,1014	−0,5446	−0,5410
40	0,5553	−2,3280	−0,1377	−0,6217	−0,5272
50	0,4309	−2,1536	−0,1764	−0,6716	−0,4777
60	0,3154	−2,0115	−0,2184	−0,7040	−0,4156
70	0,2067	−1,9118	−0,2649	−0,7243	−0,3473
80	0,1022	−1,8533	−0,3174	−0,7355	−0,2795
90	0,0000	−1,8342	−0,3783	−0,7391	−0,2173
100	−0,1022	−1,8533	−0,4508	−0,7355	−0,1617
110	−0,2067	−1,9118	−0,5402	−0,7243	−0,1150
120	−0,3154	−2,0115	−0,6551	−0,7040	−0,0860
130	−0,4309	−2,1536	−0,8112	−0,6716	−0,0895
140	−0,5553	−2,3280	−1,0392	−0,6217	−0,1487
150	−0,6893	−2,4848	−1,4117	−0,5446	−0,3279
160	−0,8279	−2,4462	−2,1453	−0,4246	−0,7784
170	−0,9482	−1,7276	−4,3236	−0,2420	−2,1999
180	−1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞
190	−0,9482	1,7276	4,3236	0,2420	2,1999
200	−0,8279	2,4462	2,1453	0,4246	0,7784
210	−0,6893	2,4848	1,4117	0,5446	0,3279
220	−0,5553	2,3280	1,0392	0,6217	0,1487
220	−0,4309	2,1536	0,8112	0,6716	0,0895
240	−0,3154	2,0115	0,6551	0,7040	0,0860
250	−0,2067	1,9118	0,5402	0,7243	0,1150
260	−0,1022	1,8533	0,4508	0,7355	0,1617
270	0,0000	1,8342	0,3783	0,7391	0,2173
280	0,1022	1,8533	0,3174	0,7355	0,2795
290	0,2067	1,9118	0,2649	0,7243	0,3473
300	0,3154	2,0115	0,2184	0,7040	0,4156
310	0,4309	2,1536	0,1764	0,6716	0,4777
320	0,5553	2,3280	0,1377	0,6217	0,5272
330	0,6893	2,4848	0,1014	0,5446	0,5410
340	0,8279	2,4462	0,0667	0,4246	0,4919
350	0,9482	1,7276	0,0331	0,2420	0,3021
360	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$\frac{t}{l}=1{,}0$		$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
$\beta_S=90°$	V	0,0000	0,0000	0,0000
	M	0,0000	0,0000	0,0000
$\varphi_0=0{,}4227$	H	0,0000	0,0000	0,0000
$\varphi_H=0$		Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
		1,7747	1,1683	1,0192

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,4793	0,2230	0,2400
10	0,9636	−1,1250	0,4389	−0,0035	−0,0512
20	0,8875	−1,5030	0,3973	−0,1725	−0,2261
30	0,7990	−1,5832	0,3547	−0,2960	−0,3125
40	0,7135	−1,5780	0,3100	−0,4059	−0,3639
50	0,6247	−1,5635	0,2624	−0,4858	−0,3935
60	0,5398	−1,5589	0,2106	−0,5546	−0,4021
70	0,4555	−1,5747	0,1535	−0,6152	−0,3808
80	0,3641	−1,6062	0,0887	−0,6681	−0,3635
90	0,2716	−1,7127	0,0137	−0,7177	−0,3311
100	0,1736	−1,8440	−0,0757	−0,7595	−0,2906
110	0,0651	−2,0407	−0,1859	−0,7975	−0,2418
120	−0,0553	−2,3246	−0,3271	−0,8292	−0,1996
130	−0,1951	−2,7215	−0,5196	−0,8502	−0,1697
140	−0,3612	−3,2547	−0,7992	−0,8520	−0,1797
150	−0,5575	−3,7990	−1,2590	−0,8145	−0,3152
160	−0,7730	−3,7490	−2,1600	−0,6995	−0,7597
170	−0,9435	−2,1394	−4,8470	−0,4823	−2,3732
180	−1,0000	0,0000	∞	−0,2230	∞
190	−0,9636	1,1250	5,8056	0,0035	2,8713
200	−0,8875	1,5030	3,1186	0,1725	1,2576
210	−0,7990	1,5832	2,2176	0,2960	0,7002
220	−0,7135	1,5780	1,7578	0,4059	0,4257
230	−0,6247	1,5635	1,4782	0,4858	0,2695
240	−0,5398	1,5589	1,2857	0,5546	0,1839
250	−0,4555	1,5747	1,1445	0,6152	0,1495
260	−0,3641	1,6062	1,0343	0,6681	0,1522
270	−0,2716	1,7127	0,9450	0,7177	0,1765
280	−0,1736	1,8440	0,8699	0,7595	0,2248
290	−0,0651	2,0407	0,8051	0,7975	0,2982
300	0,0553	2,3246	0,7480	0,8292	0,3862
310	0,1951	2,7215	0,6962	0,8502	0,4927
320	0,3612	3,2547	0,6486	0,8520	0,6092
330	0,5575	3,7990	0,6039	0,8145	0,7000
340	0,7730	3,7490	0,5613	0,6995	0,7234
350	0,9435	2,1394	0,5197	0,4823	0,5515
360	1,0000	0,0000	0,4793	0,2230	0,2400

$\frac{t}{l}=1{,}0$		$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
$\beta_S=120°$	V	−0,1800	−0,2230	−0,1581
	M	0,2520	0,0000	0,0618
$\varphi_0=0{,}3823$	H	0,4793	0,2230	0,2400
$\varphi_H=0{,}2076$		Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
		2,1040	1,2845	1,1465

Tabelle 2c u. d. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi l}{t}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,8194	0,3398	0,5313
10	0,9739	−0,8230	0,7746	0,1238	0,2333
20	0,9186	−1,0990	0,7199	−0,0427	−0,0028
30	0,8547	−1,1856	0,6681	−0,1751	−0,1692
40	0,7880	−1,2163	0,6140	−0,2852	−0,2738
50	0,7194	−1,2376	0,5563	−0,3807	−0,3208
60	0,6506	−1,2709	0,4932	−0,4660	−0,3507
70	0,5781	−1,3177	0,4240	−0,5440	−0,3664
80	0,5019	−1,4180	0,3454	−0,6172	−0,3699
90	0,4205	−1,5350	0,2548	−0,6878	−0,3629
100	0,3306	−1,7230	0,1468	−0,7565	−0,3455
110	0,2282	−1,9890	0,0135	−0,8241	−0,3204
120	0,1070	−2,3970	−0,1583	−0,8900	−0,2899
130	−0,0375	−3,0090	−0,3917	−0,9545	−0,2648
140	−0,2321	−3,9100	−0,7315	−0,9940	−0,2483
150	−0,4794	−5,0000	−1,2870	−0,9886	−0,3094
160	−0,7575	−4,6620	−2,3820	−0,8801	−0,7694
170	−0,9496	−2,0730	−5,6350	−0,6087	−2,5264
180	−1,0000	0,0000	∞	−0,3398	∞
190	−0,9739	0,8230	7,2738	−0,1238	3,5790
200	−0,9186	1,0990	4,0208	0,0427	1,6963
210	−0,8547	1,1856	2,9260	0,1751	0,9836
220	−0,7880	1,2163	2,3703	0,2852	0,6247
230	−0,7194	1,2376	2,0305	0,3807	0,4493
240	−0,6506	1,2709	1,7971	0,4660	0,3160
250	−0,5781	1,3177	1,6253	0,5440	0,2481
260	−0,5019	1,4180	1,4920	0,6172	0,2170
270	−0,4205	1,5350	1,3840	0,6878	0,2148
280	−0,3306	1,7230	1,2934	0,7565	0,2414
290	−0,2282	1,9890	1,2150	0,8241	0,2945
300	−0,1070	2,3970	1,1456	0,8900	0,3771
310	0,0375	3,0090	1,0825	0,9545	0,4893
320	0,2321	3,9100	1,0250	0,9940	0,6504
330	0,4794	5,0000	0,9704	0,9886	0,8458
340	0,7575	4,6620	0,9189	0,8801	0,9191
350	0,9496	2,0730	0,8641	0,6087	0,7985
360	1,0000	0,0000	0,8194	0,3398	0,5313

$\frac{t}{l} = 1{,}0$

$\beta_S = 135°$

$\varphi_0 = 0{,}3308$

$\varphi_H = 0{,}3088$

	u_0^*	u_1^*	$\bar{u}_2^*$
V	−0,2880	−0,3398	−0,2595
M	0,3840	0,0000	0,0957
H	0,8194	0,3398	0,5313
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	2,5208	1,4549	1,2908

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi l}{t}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	1,3685	0,4649	0,5556
10	0,9825	−0,5300	1,2950	0,2590	0,2847
20	0,9477	−0,7159	1,2225	0,0968	0,1313
30	0,9060	−0,7923	1,1432	−0,0382	0,0101
40	0,8601	−0,8357	1,0625	−0,1543	−0,0814
50	0,8125	−0,8756	0,9765	−0,2597	−0,1567
60	0,7623	−0,9253	0,8830	−0,3571	−0,2149
70	0,7084	−0,9949	0,7797	−0,4515	−0,2747
80	0,6512	−1,0935	0,6629	−0,5431	−0,3210
90	0,5867	−1,2373	0,5277	−0,6369	−0,3641
100	0,5124	−1,4498	0,3664	−0,7320	−0,4058
110	0,4237	−1,7757	0,1676	−0,8334	−0,4292
120	0,3112	−2,3057	−0,0878	−0,9423	−0,4696
130	0,1474	−3,2705	−0,4347	−1,0610	−0,4739
140	−0,0790	−4,8776	−0,9417	−1,1694	−0,4819
150	−0,3949	−7,0654	−1,7696	−1,2212	−0,6011
160	−0,7724	−5,5594	−3,4003	−1,0552	−1,2593
170	−0,9536	−1,6337	−8,2425	−0,7365	−3,8075
180	−1,0000	0,0000	∞	−0,4649	∞
190	−0,9825	0,5300	10,9795	−0,2590	5,0301
200	−0,9477	0,7159	6,1373	−0,0968	2,5395
210	−0,9060	0,7923	4,5100	0,0382	1,6598
220	−0,8601	0,8357	3,6787	0,1543	1,2005
230	−0,8125	0,8756	3,1717	0,2597	0,9189
240	−0,7623	0,9253	2,8249	0,3571	0,7366
250	−0,7084	0,9949	2,5694	0,4515	0,6023
260	−0,6512	1,0935	2,3706	0,5431	0,5158
270	−0,5867	1,2373	2,2094	0,6369	0,4599
280	−0,5124	1,4498	2,0741	0,7320	0,4309
290	−0,4237	1,7757	1,9573	0,8334	0,4378
300	−0,3112	2,3057	1,8540	0,9423	0,4798
310	−0,1474	3,2705	1,7605	1,0610	0,6017
320	0,0790	4,8776	1,6746	1,1694	0,8000
330	0,3949	7,0654	1,5939	1,2212	1,0470
340	0,7724	5,5594	1,5145	1,0552	1,1489
350	0,9536	1,6337	1,4421	0,7365	0,9379
360	1,0000	0,0000	1,3685	0,4649	0,5556

$\frac{t}{l} = 1{,}0$

$\beta_S = 150°$

$\varphi_0 = 0{,}2547$

$\varphi_H = 0{,}4076$

	$\bar{u}_0^*$	$\bar{u}_1^*$	$\bar{u}_2^*$
V	−0,5950	−0,4649	−0,4065
M	0,4660	0,0000	0,1169
H	1,3685	0,4649	0,5556
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	3,5572	1,7688	1,7430

Tabelle 3a u. b. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,9717	−0,6633	−0,0546	−0,2041	−0,2536
20	0,8944	−1,1413	−0,1102	−0,3856	−0,4594
30	0,7849	−1,4404	−0,1675	−0,5332	−0,5644
40	0,6590	−1,5625	−0,2275	−0,6461	−0,6129
50	0,5269	−1,5986	−0,2914	−0,7290	−0,6001
60	0,3937	−1,5953	−0,3607	−0,7875	−0,5544
70	0,2613	−1,5799	−0,4406	−0,8263	−0,4803
80	0,1303	−1,5665	−0,5244	−0,8483	−0,4087
90	0,0000	−1,5614	−0,6249	−0,8554	−0,3359
100	−0,1303	−1,5665	−0,7448	−0,8483	−0,2736
110	−0,2613	−1,5799	−0,8925	−0,8263	−0,2347
120	−0,3937	−1,5953	−1,0823	−0,7875	−0,2213
130	−0,5269	−1,5986	−1,3401	−0,7290	−0,2769
140	−0,6590	−1,5625	−1,7170	−0,6461	−0,4324
150	−0,7849	−1,4404	−2,3322	−0,5332	−0,7793
160	−0,8944	−1,1413	−3,5440	−0,3856	−1,5049
170	−0,9717	−0,6633	−7,1427	−0,2041	−3,6155
180	−1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞
190	−0,9717	0,6633	7,1427	0,2041	3,6155
200	−0,8944	1,1413	3,5440	0,3856	1,5049
210	−0,7849	1,4404	2,3322	0,5332	0,7793
220	−0,6590	1,5625	1,7170	0,6461	0,4324
230	−0,5269	1,5986	1,3401	0,7290	0,2769
240	−0,3937	1,5953	1,0823	0,7875	0,2213
250	−0,2613	1,5799	0,8925	0,8263	0,2347
260	−0,1303	1,5665	0,7448	0,8483	0,2736
270	0,0000	1,5614	0,6249	0,8554	0,3359
280	0,1303	1,5665	0,5244	0,8483	0,4087
290	0,2613	1,5799	0,4406	0,8263	0,4803
300	0,3937	1,5953	0,3607	0,7875	0,5544
310	0,5269	1,5986	0,2914	0,7290	0,6001
320	0,6590	1,5625	0,2275	0,6461	0,6129
330	0,7849	1,4404	0,1675	0,5332	0,5644
340	0,8944	1,1413	0,1102	0,3856	0,4594
350	0,9717	0,6633	0,0546	0,2041	0,2536
360	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
$\frac{t}{l}=1{,}5$			
$\beta_S=90°$			
$\psi_0=0{,}7330$			
$\varphi_H=0$			
V	0,0000	0,0000	0,0000
M	0,0000	0,0000	0,0000
H	0,0000	0,0000	0,0000
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	2,3963	1,3470	1,2882

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,3249	0,1267	0,1500
10	0,9784	−0,4874	0,2619	−0,0637	−0,0931
20	0,9236	−0,8022	0,1978	−0,2305	−0,2806
30	0,8480	−0,9970	0,1317	−0,3726	−0,4153
40	0,7593	−1,1223	0,0625	−0,4929	−0,4955
50	0,6618	−1,2132	−0,0112	−0,5952	−0,5368
60	0,5574	−1,2914	−0,0912	−0,6818	−0,5459
70	0,4466	−1,3707	−0,1797	−0,7552	−0,5345
80	0,3282	−1,4606	−0,2798	−0,8165	−0,4974
90	0,2026	−1,5673	−0,3958	−0,8651	−0,4408
100	0,0670	−1,6929	−0,5340	−0,9005	−0,3856
110	−0,0780	−1,8360	−0,7044	−0,9196	−0,3283
120	−0,2392	−1,9840	−0,9258	−0,9222	−0,2892
130	−0,4097	−2,0969	−1,2206	−0,8863	−0,3031
140	−0,5857	−2,0974	−1,6551	−0,8161	−0,4260
150	−0,7529	−1,8695	−2,3647	−0,6975	−0,7843
160	−0,8891	−1,3547	−3,7622	−0,5298	−1,5943
170	−0,9736	−0,6581	−7,9120	−0,3318	−3,9530
180	−1,0000	0,0000	∞	−0,1267	∞
190	−0,9784	0,4874	8,5620	0,0637	4,2580
200	−0,9236	0,8022	4,4170	0,2305	1,9313
210	−0,8480	0,9970	3,0660	0,3726	1,1232
220	−0,7593	1,1223	2,3049	0,4929	0,6800
230	−0,6618	1,2132	1,8703	0,5952	0,4496
240	−0,5574	1,2914	1,5730	0,6818	0,3265
250	−0,4466	1,3707	1,3581	0,7552	0,2717
260	−0,3282	1,4606	1,1837	0,8165	0,2698
270	−0,2026	1,5673	1,0455	0,8651	0,3143
280	−0,0670	1,6929	0,9301	0,9005	0,3819
290	0,0780	1,8360	0,8294	0,9196	0,4758
300	0,2392	1,9840	0,7409	0,9222	0,5845
310	0,4097	2,0969	0,6609	0,8863	0,6833
320	0,5857	2,0974	0,5872	0,8161	0,7495
330	0,7529	1,8695	0,5180	0,6975	0,7284
340	0,8891	1,3547	0,4519	0,5298	0,6149
350	0,9736	0,6581	0,3878	0,3318	0,3987
360	1,0000	0,0000	0,3249	0,1267	0,1500

	$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
$\frac{t}{l}=1{,}5$			
$\beta_S=120°$			
$\psi_0=0{,}7039$			
$\varphi_H=0{,}3370$			
V	−0,1200	−0,1267	−0,0829
M	0,1360	0,0000	0,0333
H	0,3249	0,1267	0,1500
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	2,5985	1,4310	1,3622

Tabelle 3c u. d. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,4916	0,1742	0,1900
10	0,9834	—0,3743	0,4155	—0,0055	—0,0102
20	0,9411	—0,6223	0,3404	—0,1649	—0,1908
30	0,8817	—0,7933	0,2582	—0,3057	—0,3316
40	0,8101	—0,9235	0,1746	—0,4302	—0,4359
50	0,7282	—1,0379	0,0855	—0,5419	—0,5058
60	0,6370	—1,1514	—0,0112	—0,6423	—0,5448
70	0,5360	—1,2759	—0,1182	—0,7331	—0,5599
80	0,4237	—1,4220	—0,2392	—0,8143	—0,5562
90	0,2981	—1,5972	—0,3793	—0,8854	—0,5260
100	0,1566	—1,8072	—0,5463	—0,9439	—0,4779
110	—0,0040	—2,0479	—0,7522	—0,9850	—0,4213
120	—0,1849	—2,2896	—1,0167	—1,0000	—0,3769
130	—0,3854	—2,4479	—1,3760	—0,9737	—0,3828
140	—0,5867	—2,3765	—1,9011	—0,8980	—0,5252
150	—0,7693	—1,9497	—2,7585	—0,7602	—0,9547
160	—0,9039	—1,2566	—4,4473	—0,5754	—1,9049
170	—0,9785	—0,5490	—9,4620	—0,3719	—4,6290
180	—1,0000	0,0000	∞	—0,1742	∞
190	—0,9834	0,3743	10,4460	0,0055	5,0710
200	—0,9411	0,6223	5,4400	0,1649	2,3924
210	—0,8817	0,7933	3,7417	0,3057	1,4331
220	—0,8101	0,9235	2,8842	0,4302	0,9368
230	—0,7282	1,0379	2,3591	0,5419	0,6460
240	—0,6370	1,1514	1,9999	0,6423	0,4740
250	—0,5360	1,2759	1,7353	0,7331	0,3791
260	—0,4237	1,4220	1,5294	0,8143	0,3398
270	—0,2981	1,5972	1,3624	0,8854	0,3563
280	—0,1566	1,8072	1,2223	0,9439	0,4180
290	0,0040	2,0479	1,1014	0,9850	0,5176
300	0,1849	2,2896	0,9943	1,0000	0,6418
310	0,3854	2,4479	0,8976	0,9737	0,7690
320	0,5867	2,3765	0,8086	0,8980	0,8475
330	0,7693	1,9497	0,7250	0,7602	0,8100
340	0,9039	1,2566	0,6427	0,5754	0,6736
350	0,9785	0,5490	0,5677	0,3719	0,4517
360	1,0000	0,0000	0,4916	0,1742	0,1900

$\frac{t}{l}=1{,}5$

$\beta_S=135°$

$\varphi_0=0{,}6684$

$\varphi_H=0{,}5285$

	$\bar{u}_0^*$	$\bar{u}_1^*$	$\bar{u}_2^*$
V	—0,2100	—0,1742	—0,1654
M	0,1770	0,0000	0,0437
H	0,4916	0,1742	0,1900
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	2,9746	1,5416	1,5069

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,6289	0,1912	0,2649
10	0,9883	—0,2649	0,5286	0,0258	0,0444
20	0,9580	—0,4569	0,4261	—0,1259	—0,1277
30	0,9132	—0,6102	0,3203	—0,2647	—0,2714
40	0,8567	—0,7478	0,2096	—0,3938	—0,3913
50	0,7883	—0,8917	0,0916	—0,5158	—0,4913
60	0,7086	—1,0399	—0,0371	—0,6301	—0,5685
70	0,6145	—1,2215	—0,1789	—0,7348	—0,6233
80	0,5038	—1,4457	—0,3391	—0,8403	—0,6496
90	0,3719	—1,7273	—0,5248	—0,9391	—0,6458
100	0,2141	—2,0730	—0,7459	—1,0219	—0,6148
110	0,0254	—2,4582	—1,0187	—1,0816	—0,5605
120	—0,1939	—2,7792	—1,3691	—1,1005	—0,5107
130	—0,4300	—2,8214	—1,8449	—1,0575	—0,5485
140	—0,6524	—2,4062	—2,5406	—0,9406	—0,7837
150	—0,8226	—1,6770	—3,6764	—0,7678	—1,3382
160	—0,9308	—0,9452	—5,9130	—0,5697	—2,5650
170	—0,9850	—0,3857	—12,5560	—0,3736	—5,9490
180	—1,0000	0,0000	∞	—0,1912	∞
190	—0,9883	0,2649	13,8140	—0,0258	6,4840
200	—0,9580	0,4569	7,1710	0,1259	3,1420
210	—0,9132	0,6102	4,9341	0,2647	1,9651
220	—0,8567	0,7478	3,7983	0,3938	1,3483
230	—0,7883	0,8917	3,1026	0,5158	0,9683
240	—0,7086	1,0399	2,6268	0,6301	0,7228
250	—0,6145	1,2215	2,2764	0,7348	0,5669
260	—0,5038	1,4457	2,0036	0,8403	0,4860
270	—0,3719	1,7273	1,7825	0,9391	0,4726
280	—0,2141	2,0730	1,5968	1,0219	0,5208
290	—0,0254	2,4582	1,4366	1,0816	0,6297
300	0,1939	2,7792	1,2948	1,1005	0,7806
310	0,4300	2,8214	1,1667	1,0575	0,9113
320	0,6524	2,4062	1,0488	0,9406	0,9562
330	0,8226	1,6770	0,9380	0,7678	0,8985
340	0,9308	0,9452	0,8322	0,5697	0,7039
350	0,9850	0,3857	0,7292	0,3736	0,4911
360	1,0000	0,0000	0,6289	0,1912	0,2649

$\frac{t}{l}=1{,}5$

$\beta_S=150°$

$\varphi_0=0{,}6215$

$\varphi_H=0{,}7631$

	$\bar{u}_0^*$	$\bar{u}_1^*$	$\bar{u}_2^*$
V	—0,2580	—0,1912	—0,1650
M	0,1820	0,0000	0,0472
H	0,6289	0,1912	0,2649
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	3,6154	1,7016	1,7521

Tabelle 3e. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,9937	−0,1539	−0,1748	−0,1447	−0,2028
20	0,9739	−0,3247	−0,3528	−0,2916	−0,3871
30	0,9385	−0,5330	−0,5360	−0,4427	−0,5644
40	0,8832	−0,8066	−0,7280	−0,6092	−0,7329
50	0,8012	−1,1848	−0,9328	−0,7628	−0,8905
60	0,6816	−1,7142	−1,1548	−0,9291	−1,0119
70	0,5107	−2,4096	−1,4004	−1,0869	−1,0561
80	0,2791	−3,1282	−1,6784	−1,2095	−1,0169
90	0,0000	−3,4643	−2,0000	−1,2576	−0,8940
100	−0,2791	−3,1282	−2,3836	−1,2095	−0,7991
110	−0,5107	−2,4096	−2,8564	−1,0869	−0,8467
120	−0,6816	−1,7142	−3,4640	−0,9291	−1,0529
130	−0,8012	−1,1848	−4,2892	−0,7628	−1,4443
140	−0,8832	−0,8066	−5,4952	−0,6092	−2,0495
150	−0,9385	−0,5330	−7,4644	−0,4427	−3,0120
160	−0,9739	−0,3247	−11,3430	−0,2916	−4,8413
170	−0,9937	−0,1539	−22,8600	−0,1447	−10,0950
180	−1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞
190	−0,9937	0,1539	22,8600	0,1447	10,0950
200	−0,9739	0,3247	11,3430	0,2916	4,8413
210	−0,9385	0,5330	7,4644	0,4427	3,0120
220	−0,8832	0,8066	5,4952	0,6092	2,0495
230	−0,8012	1,1848	4,2892	0,7628	1,4443
240	−0,6816	1,7142	3,4640	0,9291	1,0529
250	−0,5107	2,4096	2,8564	1,0869	0,8467
260	−0,2791	3,1282	2,3836	1,2095	0,7991
270	0,0000	3,4643	2,0000	1,2576	0,8940
280	0,2791	3,1282	1,6784	1,2095	1,0169
290	0,5107	2,4096	1,4004	1,0869	1,0561
300	0,6816	1,7142	1,1548	0,9291	1,0119
310	0,8012	1,1848	0,9328	0,7628	0,8905
320	0,8832	0,8066	0,7280	0,6092	0,7329
330	0,9385	0,5330	0,5360	0,4427	0,5644
340	0,9739	0,3247	0,3528	0,2916	0,3871
350	0,9937	0,1539	0,1748	0,1447	0,2028
360	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$\frac{t}{l} = 1{,}5$

$\beta_S = 180°$

$\psi_0 = 0{,}5490$

$\varphi_H = 1{,}5708$

	$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
V	0,0000	0,0000	0,0000
M	0,0000	0,0000	0,0000
H	0,0000	0,0000	0,0000
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	5,1962	1,9858	2,3230

Tabelle 4a. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,9779	−0,3908	−0,0660	−0,1908	−0,2190
20	0,9201	−0,7232	−0,1331	−0,3678	−0,4338
30	0,8205	−0,9681	−0,2023	−0,5216	−0,5704
40	0,7033	−1,1277	−0,2748	−0,6484	−0,6453
50	0,5724	−1,2218	−0,3520	−0,7476	−0,6504
60	0,4335	−1,2727	−0,4358	−0,8212	−0,6171
70	0,2906	−1,2978	−0,5286	−0,8716	−0,5538
80	0,1457	−1,3087	−0,6335	−0,9010	−0,4742
90	0,0000	−1,3116	−0,7549	−0,9106	−0,3946
100	−0,1457	−1,3087	−0,8997	−0,9010	−0,3271
110	−0,2906	−1,2978	−1,0782	−0,8716	−0,2860
120	−0,4335	−1,2727	−1,3076	−0,8212	−0,2941
130	−0,5724	−1,2218	−1,6190	−0,7476	−0,3798
140	−0,7033	−1,1277	−2,0742	−0,6484	−0,5820
150	−0,8205	−0,9681	−2,8175	−0,5216	−1,0079
160	−0,9201	−0,7232	−4,2815	−0,3678	−1,8736
170	−0,9779	−0,3908	−8,6290	−0,1908	−4,3256
180	−1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞
190	−0,9779	0,3908	8,6290	0,1908	4,3256
200	−0,9201	0,7232	4,2815	0,3678	1,8736
210	−0,8205	0,9681	2,8175	0,5216	1,0079
220	−0,7033	1,1277	2,0742	0,6484	0,5820
230	−0,5724	1,2218	1,6190	0,7476	0,3798
240	−0,4335	1,2727	1,3076	0,8212	0,2941
250	−0,2906	1,2978	1,0782	0,8716	0,2860
260	−0,1457	1,3087	0,8997	0,9010	0,3271
270	0,0000	1,3116	0,7549	0,9106	0,3946
280	0,1457	1,3087	0,6335	0,9010	0,4742
290	0,2906	1,2978	0,5286	0,8716	0,5538
300	0,4335	1,2727	0,4358	0,8212	0,6171
310	0,5724	1,2218	0,3520	0,7476	0,6504
320	0,7033	1,1277	0,2748	0,6484	0,6453
330	0,8205	0,9681	0,2023	0,5216	0,5704
340	0,9201	0,7232	0,1331	0,3678	0,4338
350	0,9779	0,3908	0,0660	0,1908	0,2190
360	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$\frac{t}{l} = 2{,}0$

$\beta_S = 90°$

$\psi_0 = 0{,}9842$

$\varphi_H = 0$

	$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
V	0,0000	0,0000	0,0000
M	0,0000	0,0000	0,0000
H	0,0000	0,0000	0,0000
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	2,6230	1,4319	1,3710

Tabelle 4b u. c. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,2158	0,0786	0,0967
10	0,9819	−0,3158	0,1424	−0,1028	−0,1489
20	0,9325	−0,5609	0,0678	−0,2688	−0,3274
30	0,8594	−0,7487	0,0091	−0,4167	−0,4636
40	0,7684	−0,8905	−0,0897	−0,5455	−0,5625
50	0,6635	−0,9982	−0,1756	−0,6564	−0,6151
60	0,5473	−1,0937	−0,2687	−0,7500	−0,6144
70	0,4208	−1,1814	−0,3719	−0,8267	−0,5972
80	0,2849	−1,2660	−0,4885	−0,8866	−0,5499
90	0,1395	−1,3491	−0,6235	−0,9285	−0,4826
100	−0,0149	−1,4270	−0,7845	−0,9502	−0,4135
110	−0,1773	−1,4905	−0,9828	−0,9488	−0,3548
120	−0,3449	−1,5204	−1,2378	−0,9189	−0,3384
130	−0,5126	−1,4878	−1,5840	−0,8563	−0,3969
140	−0,6720	−1,3598	−2,0900	−0,7567	−0,5980
150	−0,8106	−1,1150	−2,9163	−0,6202	−1,0534
160	−0,9159	−0,7690	−4,5437	−0,4530	−1,9894
170	−0,9796	−0,3759	−9,3765	−0,2680	−4,6476
180	−1,0000	0,0000	∞	−0,0786	∞
190	−0,9819	0,3158	9,8082	0,1028	4,8522
200	−0,9325	0,5609	4,9753	0,2688	2,2117
210	−0,8594	0,7487	3,3479	0,4167	1,2733
220	−0,7684	0,8905	2,5216	0,5455	0,7886
230	−0,6635	0,9982	2,0155	0,6564	0,5186
240	−0,5473	1,0937	1,6693	0,7500	0,3883
250	−0,4208	1,1814	1,4144	0,8267	0,3262
260	−0,2849	1,2660	1,2160	0,8866	0,3320
270	−0,1395	1,3491	1,0550	0,9285	0,3859
280	0,0149	1,4270	0,9200	0,9502	0,4684
290	0,1773	1,4905	0,8034	0,9488	0,5694
300	0,3449	1,5204	0,7003	0,9189	0,6643
310	0,5126	1,4878	0,6071	0,8563	0,7368
320	0,6720	1,3598	0,5212	0,7567	0,7531
330	0,8106	1,1150	0,4407	0,6202	0,6834
340	0,9159	0,7690	0,3637	0,4530	0,5497
350	0,9796	0,3759	0,2891	0,2680	0,3534
360	1,0000	0,0000	0,2158	0,0786	0,0967

		$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
$\frac{t}{l}=2{,}0$	V	−0,0840	−0,0786	−0,0585
$\beta_S=120°$	M	0,0820	0,0000	0,0230
$\varphi_0=0{,}9645$	H	0,2158	0,0786	0,0967
$\varphi_H=0{,}4068$		Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
		2,8235	1,4905	1,4609

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,3098	0,1016	0,1350
10	0,9845	−0,2642	0,2264	−0,0724	−0,0805
20	0,9430	−0,4733	0,1415	−0,2331	−0,2680
30	0,8807	−0,6420	0,0539	−0,3795	−0,4143
40	0,8013	−0,7844	−0,0378	−0,5113	−0,5263
50	0,7068	−0,9129	−0,1355	−0,6296	−0,5949
60	0,5987	−1,0360	−0,2416	−0,7342	−0,6250
70	0,4768	−1,1602	−0,3588	−0,8245	−0,6239
80	0,3409	−1,2880	−0,4915	−0,8994	−0,5912
90	0,1906	−1,4182	−0,6452	−0,9567	−0,5361
100	0,0260	−1,5420	−1,8283	−0,9917	−0,4669
110	−0,1508	−1,6390	−1,0541	−0,9887	−0,4035
120	−0,3353	−1,6748	−1,3442	−0,9812	−0,3184
130	−0,5183	−1,6033	−1,7381	−0,9029	−0,4488
140	−0,6871	−1,4078	−2,3140	−0,7917	−0,6987
150	−0,8265	−1,0871	−3,2542	−0,6432	−1,1905
160	−0,9259	−0,7044	−5,1061	−0,4693	−2,2428
170	−0,9823	−0,3270	−8,0393	−0,2844	−3,8886
180	−1,0000	0,0000	∞	−0,1016	∞
190	−0,9845	0,2642	8,6590	0,0724	4,1552
200	−0,9430	0,4733	5,7258	0,2331	2,3234
210	−0,8807	0,6420	3,8739	0,3795	1,5046
220	−0,8013	0,7844	2,9336	0,5113	0,9662
230	−0,7068	0,9129	2,3578	0,6296	0,7575
240	−0,5987	1,0360	1,9638	0,7342	0,4828
250	−0,4768	1,1602	1,6737	0,8245	0,3970
260	−0,3409	1,2880	1,4480	0,8994	0,3831
270	−0,1906	1,4182	1,2648	0,9567	0,4233
280	−0,0260	1,5420	1,1111	0,9917	0,5073
290	0,1508	1,6390	0,9785	0,9887	0,6175
300	0,3353	1,6748	0,8613	0,9812	0,7264
310	0,5183	1,6033	0,7551	0,9029	0,8035
320	0,6871	1,4078	0,6574	0,7917	0,7938
330	0,8265	1,0871	0,5658	0,6432	0,7383
340	0,9259	0,7044	0,4782	0,4693	0,5622
350	0,9823	0,3270	0,3933	0,2844	0,3471
360	1,0000	0,0000	0,3098	0,1016	0,1350

		$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
$\frac{t}{l}=20$	V	−0,1450	−0,1016	−0,1028
$\beta_S=135°$	M	0,1220	0,0000	0,0280
$\varphi_0=0{,}9410$	H	0,3098	0,1016	0,1350
$\varphi_H=0{,}6348$		Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
		3,0847	1,5574	1,5494

Tabelle 4d u. e. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für Plattengitter*

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,3213	0,1000	0,1369
10	0,9875	−0,2157	0,2229	−0,0654	−0,0692
20	0,9532	−0,4003	0,1228	−0,2216	−0,2443
30	0,8999	−0,5594	0,0195	−0,3674	−0,4151
40	0,8294	−0,7117	−0,0885	−0,5037	−0,5337
50	0,7417	−0,8643	−0,2037	−0,6303	−0,6241
60	0,6371	−1,0236	−0,3287	−0,7464	−0,6772
70	0,5139	−1,1947	−0,4671	−0,8505	−0,6931
80	0,3694	−1,3840	−0,6235	−0,9414	−0,6689
90	0,2078	−1,5617	−0,8047	−1,0073	−0,6221
100	0,0259	−1,7244	−1,0206	−1,0482	−0,5447
110	−0,1726	−1,8191	−1,2868	−1,0514	−0,4836
120	−0,3747	−1,7957	−1,6289	−1,0101	−0,4665
130	−0,5658	−1,6194	−2,0934	−0,9204	−0,5874
140	−0,7298	−1,3130	−2,7723	−0,7889	−0,8743
150	−0,8553	−0,9431	−3,8809	−0,6278	−1,4730
160	−0,9394	−0,5798	−6,0643	−0,4523	−2,6536
170	−0,9859	−0,2627	−12,5484	−0,2732	−5,9575
180	−1,0000	0,0000	∞	−0,1000	∞
190	−0,9875	0,2157	13,1913	0,0654	6,2620
200	−0,9532	0,4003	6,7071	0,2216	2,9701
210	−0,8999	0,5594	4,5235	0,3674	1,7858
220	−0,8294	0,7117	3,4150	0,5037	1,1767
230	−0,7417	0,8643	2,7360	0,6303	0,8110
240	−0,6371	1,0236	2,2715	0,7464	0,5922
250	−0,5139	1,1947	1,9294	0,8505	0,4768
260	−0,3694	1,3840	1,6632	0,9414	0,4475
270	−0,2078	1,5617	1,4473	1,0073	0,4774
280	−0,0259	1,7244	1,2661	1,0482	0,5717
290	0,1726	1,8191	1,1097	1,0514	0,6864
300	0,3747	1,7957	0,9713	1,0101	0,8029
310	0,5658	1,6194	0,8760	0,9204	0,8623
320	0,7298	1,3130	0,7312	0,7889	0,8361
330	0,8553	0,9431	0,6231	0,6278	0,7259
340	0,9394	0,5798	0,5198	0,4523	0,5608
350	0,9859	0,2627	0,4197	0,2732	0,3735
360	1,0000	0,0000	0,3213	0,1000	0,1369

$\frac{t}{l} = 2{,}0$

$\beta_S = 150°$

$\varphi_0 = 0{,}9147$

$\varphi_H = 0{,}8972$

	$\overline{u_0^*}$	$\overline{u_1^*}$	$\overline{u_2^*}$
V	−0,1480	−0,1000	−0,0923
M	0,1000	0,0000	0,0200
H	0,3213	0,1000	0,1369
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	3,4456	1,6488	1,6821

$\varphi-\varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{\pi}{t}\frac{l}{d\varphi}\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,9903	−0,1762	−0,1236	−0,1571	−0,1946
20	0,9604	−0,3632	−0,2493	−0,3141	−0,3834
30	0,9088	−0,5712	−0,3790	−0,4700	−0,5586
40	0,8323	−0,8101	−0,5148	−0,6245	−0,7018
50	0,7274	−1,0842	−0,6595	−0,7722	−0,8084
60	0,5904	−1,3854	−0,8165	−0,9075	−0,8644
70	0,4195	−1,6823	−0,9903	−1,0195	−0,8474
80	0,2190	−1,9117	−1,1867	−1,0921	−0,7670
90	0,0000	−1,9998	−1,4143	−1,1221	−0,6670
100	−0,2190	−1,9117	−1,6856	−1,0921	−0,5890
110	−0,4195	−1,6823	−2,0199	−1,0195	−0,5737
120	−0,5904	−1,3854	−2,4496	−0,9075	−0,6776
130	−0,7274	−1,0842	−3,0330	−0,7722	−0,9348
140	−0,8323	−0,8101	−3,8858	−0,6245	−1,3757
150	−0,9088	−0,5712	−5,2783	−0,4700	−2,1122
160	−0,9604	−0,3632	−8,0209	−0,3141	−3,5210
170	−0,9903	−0,1762	−16,1655	−0,1571	−7,4955
180	−1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞
190	−0,9903	0,1762	16,1655	0,1571	7,4955
200	−0,9604	0,3632	8,0209	0,3141	3,5210
210	−0,9088	0,5712	5,2783	0,4700	2,1122
220	−0,8323	0,8101	3,8858	0,6245	1,3757
230	−0,7274	1,0842	3,0330	0,7722	0,9348
240	−0,5904	1,3854	2,4496	0,9075	0,6776
250	−0,4195	1,6823	2,0199	1,0195	0,5737
260	−0,2190	1,9117	1,6856	1,0921	0,5890
270	0,0000	1,9998	1,4143	1,1221	0,6670
280	0,2190	1,9117	1,1867	1,0921	0,7670
290	0,4195	1,6823	0,9903	1,0195	0,8474
300	0,5904	1,3854	0,8165	0,9075	0,8644
310	0,7274	1,0842	0,6595	0,7722	0,8084
320	0,8323	0,8101	0,5148	0,6245	0,7018
330	0,9088	0,5712	0,3790	0,4700	0,5586
340	0,9604	0,6332	0,2493	0,3141	0,3834
350	0,9903	0,1762	0,1236	0,1571	0,1946
360	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$\frac{t}{l} = 2{,}0$

$\beta_S = 180°$

$\varphi_0 = 0{,}8816$

$\varphi_H = 1{,}5708$

	$\overline{u_0^*}$	$\overline{u^*}$	$\overline{u_2^*}$
V	0,0000	0,0000	0,0000
M	0,0000	0,0000	0,0000
H	0,0000	0,0000	0,0000
	Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
	4,0006	1,7649	1,8887

Tabelle 5. *Konforme Abbildung auf den Einheitskreis und Grundverteilungen für die Einzelplatte*

$\varphi - \varphi_H$ [°]	ξ	$\frac{d\xi}{d\varphi}$	u_0^*	u_1^*	u_2^*
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,9848	—0,1737	—0,0875	—0,1737	—0,2148
20	0,9397	—0,3420	—0,1763	—0,3420	—0,4096
30	0,8660	—0,5000	—0,2680	—0,5000	—0,5670
40	0,7660	—0,6428	—0,3640	—0,6428	—0,6744
50	0,6428	—0,7660	—0,4663	—0,7660	—0,7256
60	0,5000	—0,8660	—0,5774	—0,8660	—0,7217
70	0,3420	—0,9397	—0,7002	—0,9397	—0,6715
80	0,1737	—0,9848	—0,8391	—0,9848	—0,5905
90	0,0000	—1,0000	—1,0000	—1,0000	—0,5000
100	—0,1737	—0,9848	—1,1918	—0,9848	—0,4249
110	—0,3420	—0,9397	—1,4282	—0,9397	—0,3927
120	—0,5000	—0,8660	—1,7321	—0,8660	—0,4331
130	—0,6428	—0,7660	—2,1445	—0,7660	—0,5799
140	—0,7660	—0,6428	—2,7475	—0,6428	—0,8814
150	—0,8660	—0,5000	—3,7321	—0,5000	—1,4331
160	—0,9397	—0,3420	—5,6713	—0,3420	—2,5142
170	—0,9848	—0,1737	—11,4301	—0,1737	—5,5441
180	—1,0000	0,0000	∞	0,0000	∞
190	—0,9848	0,1737	11,4301	0,1737	5,5441
200	—0,9397	0,3420	5,6713	0,3420	2,5142
210	—0,8660	0,5000	3,7321	0,5000	1,4331
220	—0,7660	0,6428	2,7475	0,6428	0,8814
230	—0,6428	0,7660	2,1445	0,7660	0,5799
240	—0,5000	0,8660	1,7321	0,8660	0,4331
250	—0,3420	0,9397	1,4282	0,9397	0,3927
260	—0,1737	0,9848	1,1918	0,9848	0,4249
270	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,5000
280	0,1737	0,9848	0,8391	0,9848	0,5905
290	0,3420	0,9397	0,7002	0,9397	0,6715
300	0,5000	0,8660	0,5774	0,8660	0,7217
310	0,6428	0,7660	0,4663	0,7660	0,7256
320	0,7660	0,6428	0,3640	0,6428	0,6744
330	0,8660	0,5000	0,2680	0,5000	0,5670
340	0,9397	0,3420	0,1763	0,3420	0,4096
350	0,9848	0,1737	0,0875	0,1737	0,2148
360	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

		$\bar{u}_0^*$	$\bar{u}_1^*$	$\bar{u}_2^*$
$\frac{t}{l} = \infty$	V	0,0000	0,0000	0,0000
	M	0,0000	0,0000	0,0000
$\psi_0 = \infty$	H	0,0000	0,0000	0,0000
$\varphi_H = 0$		Γ_0^*	Γ_1^*	Γ_2^*
		3,1416	1,5708	1,5708

8. Zusammenfassung. Die Arbeit enthält ein Verfahren zum Berechnen der reibungsfreien inkompressiblen Strömung durch gerade und radiale ebene Schaufelgitter im Rahmen der linearen Theorie. Behandelt wird das direkte Problem: Ermittlung der Druckverteilung, Umlenkung und Schaufelkraft aus Gittergeometrie und Anströmung. Als Hilfsmittel sind die bekannten *Birnbaum*schen Zirkulationsverteilungen des Plattenprofils auf gerade Plattengitter verallgemeinert und tabelliert. An den Beispielen eines geraden Gitters, dessen Geschwindigkeitsverteilung mit einem vorliegenden theoretischen Ergebnis verglichen wurde, und eines Kreisgitters, das berechnet und im Versuchsstand erprobt wurde, wird die Brauchbarkeit des Verfahrens gezeigt. In die Tabellen ist die konforme Abbildung des Plattengitters auf den Einheitskreis aufgenommen, wie sie zur Behandlung verschiedener Gitterprobleme nützlich ist.

(Eingegangen am 26. Oktober 1957.)

Anschrift des Verfassers: *Helmut Krüger*, Leverkusen-Wiesdorf, Breidenbachstraße 22

Beitrag zur Berechnung von Einflußflächen schiefwinkliger Platten

Von **R. Heinen**

1. Einleitung. Die statischen Verhältnisse schiefwinkliger Platten, die wegen ihrer vielfachen Verwendung besonders im Brückenbau große Bedeutung gewonnen haben, sind noch wenig geklärt. Die meisten der in der Literatur vorhandenen Arbeiten beziehen sich auf schiefe Platten unter Gleichlast, während nur wenige Einflußflächen berechnet sind. Die zur Ermittlung der Einflußflächen rechteckiger Platten angewandten Methoden sind für schiefe Platten z. T. unbrauchbar oder erfordern für eine ausreichende Genauigkeit einen sehr großen Rechenaufwand.

In der vorliegenden Arbeit werden Einflußflächen parallelogrammförmiger Platten aufgestellt nach dem Verfahren von *F. Schultz-Grunow*, mit welchem für andere Plattenformen bei verschiedenen Lagerungsarten und Aufpunktlagen mit einem erträglichen Rechenaufwand Ergebnisse von hohem Genauigkeitsgrad erreicht wurden[1, 2, 3]. Abb. 1 zeigt die im folgenden behandelte schiefwinklige Platte. Sie hat die Form eines gleichseitigen Parallelogramms mit der Seitenlänge $2a$ und den Außenwinkeln $\alpha_1 = \frac{2}{3}\pi$ und $\alpha_2 = \frac{1}{3}\pi$. Sie ist ringsum voll eingespannt. Berechnet werden die Biegeeinflußfläche und die Momenteneinflußflächen m_x und m_y für die Biegemomente in Schnitten $x =$ konst. und $y =$ konst. für den Aufpunkt in Plattenmitte.

2. Grundlagen. Die Differentialgleichung für die Durchbiegung $w(x,y)$ einer Platte lautet unter Voraussetzung eines homogenen isotropen Baustoffes, eines konstanten Elastizitätsmoduls E, einer konstanten Querkontraktionszahl ν, der Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes, einer im Vergleich zu den übrigen Abmessungen kleinen und konstanten Plattendicke h und kleiner Formänderungen

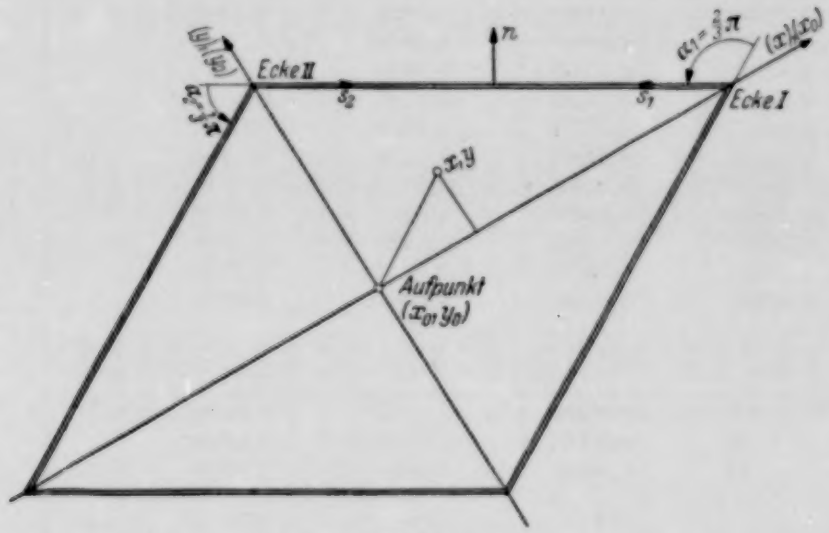


Abb. 1.

$$\Delta\Delta w = \frac{p(x,y)}{N}\,. \tag{1}$$

Hierbei bedeutet $p(x,y)$ eine beliebige stetig verteilte Belastung und

$$N = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

die Plattensteifigkeit; x, y sind rechtwinklige Koordinaten der Plattenebene. Durch Differentiation der Durchbiegung werden nach bekannten Beziehungen die Schnittgrößen gefunden, z. B. die Biegemomente

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ m_y &= -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Je nach Lagerungsart der betrachteten Platte sind für jeden Punkt der Plattenränder zwei Bedingungen gestellt. Im Falle voller Einspannung des Randes muß die Durchbiegung am Rand und ihre Ableitung normal zum Rand null werden:

$$w = 0\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0\,,$$

wobei n die in die Normalenrichtung zum Rand weisende Koordinate bedeutet (Abb. 1). Die Lösung von (1) kann für beliebige Einzellasten P_i und einer stetig verteilten Belastung $p(x,y)$ mit Hilfe *Green*scher Funktionen $G(x_0, y_0; x, y)$ dargestellt werden, wobei x_0, y_0 ebenfalls rechtwinklige Koordinaten der Plattenebene sind:

$$8\pi N\, w(x, y; x_0, y_0) = \sum_i G(x_0, y_0; x, y) P_i + \iint_F G(x_0, y_0; x, y)\, p(x, y)\, dx\, dy\,. \tag{3}$$

---

[1] *F. Schultz-Grunow*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953) S. 227.

[2] *A. Scherer*, Allgemeine Herleitung singulärer Lösungen der biharmonischen Gleichung, sowie Aufstellung *Green*scher Funktionen am Beispiel einer Dreiecksplatte mit freiem Rand — Diss. Aachen 1955.

[3] *A. Böhning*, Die Berechnung von Einflußflächen der dreiseitig sowie der allseits eingespannten Quadratplatte unter Ausnutzung von Symmetrien, Diss. Aachen 1956.

Der Faktor $8\pi N$ wird im folgenden der Größe w zugeschlagen. Unter w ist daher weiterhin die $8\pi N$-fache Durchbiegung zu verstehen. Die Biegeeinflußfläche für den Punkt (x_0, y_0) ist die durch eine Einzellast $P = 1$ im Punkt (x_0, y_0) hervorgerufene Biegefläche. Für $P = 1$ geht (3) über in

$$w(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y)\,, \tag{4}$$

und auf Grund des *Maxwell*schen Vertauschungssatzes erhält man aus (4) die Einflußfläche der Durchbiegung im Aufpunkt (x_0, y_0) für den Kraftangriff im Punkt (x, y)

$$w(x_0, y_0; x, y) = G(x, y; x_0, y_0)\,. \tag{5}$$

Die Funktion G setzt sich zusammen aus einem im Aufpunkt singulären Integral $G_0(x,y; x_0,y_0)$ und einem regulären Integral $G_1 = F_i(x,y; x_0,y_0)$. Die Funktionen F_i sind so zu bestimmen, daß G den speziellen Randbedingungen des Problems genügt.

Durch Differentiation der Biegeeinflußfläche nach den Koordinaten des Aufpunktes (x_0, y_0) erhält man die Einflußflächen der Schnittkräfte [1]. Diese können ebenfalls aus einem singulären und regulären Anteil zusammengesetzt werden, und für sie gelten die gleichen Randbedingungen wie für die Biegeeinflußflächen. Die singulären Anteile der Biegemomenteneinflußflächen können durch Anwendung der Differentialoperation (2) auf den singulären Teil G_0 der Biegefläche ermittelt werden, die regulären Anteile sind wieder so zu bestimmen, daß die speziellen Randbedingungen erfüllt sind. Für die Einflußfläche m_x z. B. entsteht ein formal gleicher Ausdruck wie (5), wenn nun die *Green*sche Funktion mit M_x bezeichnet wird:

$$m_x(x_0, y_0; x, y) = M_x(x, y; x_0, y_0)\,. \tag{6}$$

Gleichung (6) liefert zu einer in (x, y) angreifenden Last $P = 1$ das Moment m_x im Punkt (x_0, y_0).

3. Die singulären Anteile der Einflußflächen. Liegt der Aufpunkt (x_0, y_0) im Inneren des Plattenbereiches, so ist [2] der singuläre Anteil G_0 für die Biegefläche

$$G_0(x, y; x_0, y_0) = P(r^2 \ln r) \tag{7}$$

mit

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Der Singulärteil M_{x0} für das Moment m_x leitet sich aus (2) ab:

$$M_{x0} = -N\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial x_0^2} + \nu \frac{\partial^2 G_0}{\partial y_0^2}\right), \tag{8}$$

und der Singulärteil M_{y0} für das Moment m_y ist

$$M_{y0} = -N\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial y_0^2} + \nu \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_0^2}\right). \tag{9}$$

Um von der Querkontraktionszahl ν, die ja eine Materialkonstante ist, möglichst unabhängig zu sein, werden statt der Momente die Krümmungen $k_{x0} = \partial^2 G_0/\partial x_0^2$ und $k_{y0} = \partial^2 G_0/\partial y_0^2$ ermittelt. Hiermit können dann für jedes beliebige ν mit (8) und (9) die Biegemomente ermittelt werden.

Werden alle Längenkoordinaten mit der halben Seitenlänge a dimensionslos gemacht und wieder mit den gleichen Buchstaben bezeichnet, wird also z. B. für x/a nun x und y/a nun y gesetzt, so erhält man für den in Plattenmitte liegenden Aufpunkt $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$G_0 = (x^2 + y^2)\,\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\,, \tag{10}$$

$$k_{x0} = \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + 1\,, \tag{11}$$

$$k_{y0} = \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + 1\,. \tag{12}$$

An den Rändern interessieren die Normalableitungen dieser Größen. Wegen

$$\frac{\partial(\,)}{\partial n} = \frac{\partial(\,)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial(\,)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}$$

ergibt sich bei den zugrunde gelegten Eckenwinkeln (Abb. 1)

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

[1] *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 76.

[2] *Ph. Frank* u. *R. von Mises*, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Band I, S. 856ff. New York 1943.

$$\frac{\partial G_0}{\partial n} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}\,y)\,[\ln(x^2 + y^2) + 1]\,, \tag{13}$$

$$\frac{\partial k_{x0}}{\partial n} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^4}(x^3 + 3\,x\,y^2 + \sqrt{3}\,y^3 - \sqrt{3}\,x^2\,y)\,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial k_{y0}}{\partial n} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^4}(x^3 - x\,y^2 + \sqrt{3}\,y^3 + 3\sqrt{3}\,x^2\,y)\,. \tag{15}$$

4. Die regulären Anteile der Einflußflächen. Die Konstruktion des Regulärteils erfolgt nach dem Verfahren von *F. Schultz-Grunow*. Hiernach ist zunächst das Innere des Plattenbereichs konform auf das Innere des Einheitskreises abzubilden. Die in der Plattenebene (z-Ebene) definierten Fundamentalintegrale (10), (11), (12) und (13), (14), (15) weisen durch die konforme Abbildung auf die Kreisebene (ζ-Ebene) in den Bildpunkten der Plattenecken Singularitäten auf, deren Ordnung durch die Außenwinkel der polygonalen Berandung festgelegt ist. Diese Singularitäten sind zuerst zu eliminieren. Dazu werden in der Ebene des Einheitskreises definierte Potentialfunktionen gebildet, die in den Ecken Singularitäten der gleichen Ordnung wie die Fundamentalintegrale besitzen. Bipotentialfunktionen erhält man durch Multiplikation der so gewonnenen Potentialfunktionen mit x, y oder r^2. Die Funktionen und die Fundamentalintegrale werden dann in der Kreisebene in Potenzreihen nach Θ entlang des Randes entwickelt, wobei Θ den Mittelpunktswinkel des Einheitskreises bedeutet (Abb. 3). Da die Fundamentalintegrale ursprünglich für die Plattenebene gegeben sind, müssen die Potenzreihenentwicklungen der Fundamentalintegrale mit Hilfe einer Beziehung $s(\Theta)$, wobei s die Plattenrandkoordinate in der z-Ebene bedeutet (Abb. 1), die sich aus der konformen Abbildung ergibt, durchgeführt werden. Mit den Freiwerten der Funktionen werden so viele Glieder der Potenzreihen eliminiert, daß die Randwerte der Fundamentalintegrale nach Überlagerung der Funktionen an den Ecken nicht mehr singulär sind. Es müssen also die Koeffizienten der Reihenglieder mit den Exponenten < 1 beziehungsweise in der Normalableitung $\partial()/\partial n$ die Koeffizienten der Reihenglieder mit dem Exponent 0 ausgeglichen werden. Der Randverlauf der so ausgeglichenen Fundamentalintegrale hat in der z-Ebene in den Ecken den Wert Null und eine horizontale Tangente, da hier $\partial()/\partial n = 0$ ist. Wegen der durch die konforme Abbildung hervorgerufenen Verzerrung ist aber auch die Randbedingung $w = 0$ in der Eckenumgebung nahezu exakt erfüllt.

Die im eben beschriebenen Ausgleich berechneten Anteile der *Green*schen Funktionen, im folgenden „ausgeglichene Fundamentalintegrale" genannt, sind so zu ergänzen, daß die Randbedingungen für den übrigen Randbereich erfüllt sind. Dies geschieht durch Hinzufügen einer biharmonischen Funktionsreihe. Damit diese Funktionen das gleiche Verhalten aufweisen wie die „ausgeglichenen Fundamentalintegrale", werden sie so konstruiert, daß ihre Randverläufe in den Ecken den Wert Null und eine horizontale Tangente besitzen. Es können hier Funktionen der einfachsten Art, wie später gezeigt wird, herangezogen werden. Sie werden aus Potentialfunktionen, die in der ζ-Ebene definiert sind, hergestellt, indem aus ihnen durch Multiplikation mit x, y oder r^2 Bipotentialfunktionen gebildet werden. Die in der ζ-Ebene gebildete Reihe von Potentialfunktionen und die aus ihnen gebildeten Bipotentialfunktionen weist gegenüber den Funktionsreihen, die unmittelbar in der Polygonebene (z-Ebene) angesetzt werden können, eine weit bessere Konvergenz auf, wie sich im Vergleich von auf beide Arten berechneten Beispielen zeigte[1]. Man kann bereits mit wenigen Funktionen, wenn man außerdem noch die Symmetrien ausnützt, Ergebnisse von hohem Genauigkeitsgrad erzielen. Außerdem sind die Randwerte dieser Funktionen nur von einer Variablen Θ abhängig im Gegensatz zu den entsprechenden von zwei Koordinaten abhängigen Randwerten der Funktionen der z-Ebene.

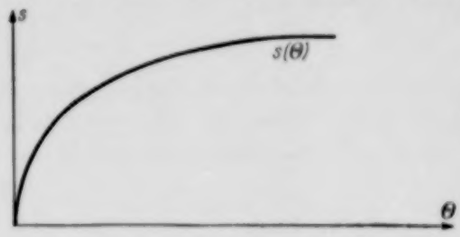


Abb. 2.

Erwähnt sei noch folgender Vorteil: Auf Grund der konformen Abbildung hat die Beziehung $s(\Theta)$ etwa den in Abb. 2 gezeigten Verlauf. Der Anstieg von $s(\Theta)$ in Eckennähe ist um so größer, je kleiner der Innenwinkel der polygonalen Berandung ist. Da der Ausgleich der Eckensingularitäten und die Überlagerung der Funktionen des Regulärteils in der ζ-Ebene erfolgt und da die Randverläufe der „ausgeglichenen Fundamentalintegrale" und der zu überlagernden Funktionen

[1] Siehe die Arbeit von *F. Schultz-Grunow* in Fußnote 1 von Seite 268.

in den Ecken den Wert Null und eine horizontale Tangente besitzen, ist die nahezu exakte Erfüllung der Randbedingung $w = 0$ in der z-Ebene in einem größeren Bereich der Eckenumgebung verifiziert als in der ζ-Ebene und zwar ist dieser Bereich um so größer, je spitzer die Ecke ist (Abb. 7 bis 12). Bei schiefwinkligen Platten bedeutet das einen nicht geringen Vorteil, da bei anderen Berechnungsverfahren gerade die Erfüllung der Randbedingungen in den spitzen Ecken Schwierigkeiten bereitet.

Die oben beschriebenen Vorteile des Verfahrens von *F. Schultz-Grunow* wiegen das Mehr an numerischer Rechnung für die konforme Abbildung und den Singularitätenausgleich bei weitem auf.

a) Konforme Abbildung. Für die konforme Abbildung des Innenbereiches eines Polygonzuges mit den Eckpunkten z_K besteht die *Schwarz-Christoffel*sche Abbildungsformel

$$\frac{dz}{d\zeta} = C_1 \prod_1^K (\zeta - \zeta_K)^{-\frac{\alpha_K}{\pi}} .$$

Hier bedeutet $z = x + i\,y$ oder $z = r\,e^{i\varepsilon}$ den Ortsvektor in der Polygonebene, $\zeta = \xi + i\,\eta$ oder $\zeta = \varrho\,e^{i\,\Theta}$ den Ortsvektor in der Ebene des Einheitskreises. Es sind ζ_K die Randpunkte des Kreises, deren Bildpunkte in der z-Ebene Eckpunkte des Vielecks sind. Die α_K sind die Außenwinkel des Polygonzuges. Es muß das Integral

$$z = C_1 \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_K (\zeta - \zeta_K)^{-\frac{\alpha_K}{\pi}} d\zeta + C_2 \tag{16}$$

berechnet werden. C_1, C_2 und die untere Integrationsgrenze ζ_0 sind komplexe Konstanten, welche die Lage und Größe des Vielecks in der Polygonebene festlegen. Es bereitet wesentliche Schwierigkeiten und einen umfangreichen Arbeitsaufwand, die konforme Abbildung für Polygone mit mehr als vier Ecken und mit beliebigen Winkeln α_K anzugeben. Ist aber die Eckenzahl $\leqq 4$ und α_K ein rationales Vielfaches von π, so ist eine Lösung im erträglichen Rahmen möglich. Abb. 3 zeigt die Zuordnung der Eckpunkte in der z- und in der ζ-Ebene.

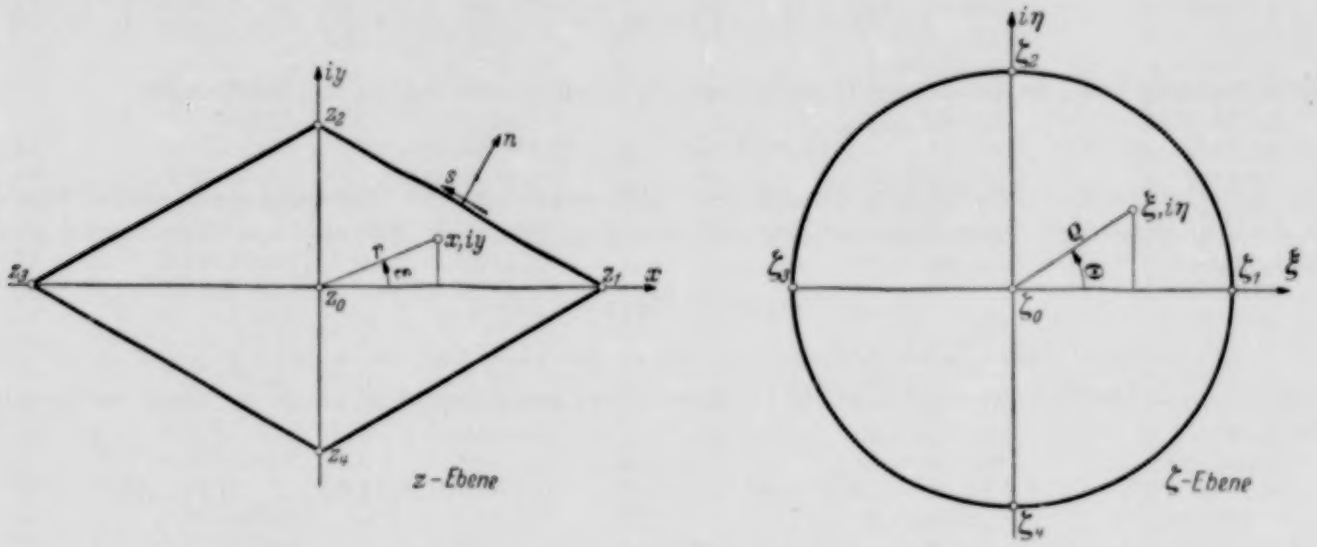


Abb. 3. Zuordnung der Eckpunkte für die konforme Abbildung des gleichseitigen Parallelogramms.

Wenn alle Längen mit der halben Seitenlänge a dimensionslos gemacht werden und für z/a wieder z geschrieben wird, bestehen die Wertpaare (Abb. 3)

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= 0 \;\;\rightarrow \zeta_0 = 0\,, \\ z_1 &= \sqrt{3} \rightarrow \zeta_1 = 1\,, \\ z_2 &= i \;\;\rightarrow \zeta_2 = i\,, \\ z_3 &= -\sqrt{3} \rightarrow \zeta_3 = -1\,, \\ z_4 &= -i \;\;\rightarrow \zeta_4 = -i\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Diese ζ-Werte in (16) eingeführt, ergibt

$$z = C_1 \int \frac{d\zeta}{(\zeta-1)^{2/3}\,(\zeta-i)^{1/3}\,(\zeta+1)^{2/3}\,(\zeta+i)^{1/3}} + C_2\,.$$

Mit der Substitution

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x^3}}{1-\sqrt{x^3}}}$$

erhält man

$$z = A\,F(\varphi, k) + B$$

mit

$$k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \qquad \text{und} \qquad \cos\varphi = \frac{(1+\sqrt{3})\,x^2 - 1}{(-1+\sqrt{3})\,x^2 + 1}.$$

Die Konstanten ergeben sich mit (17) zu

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2\,K} = 0{,}5418\,9515\,, \qquad B = 0\,, \qquad \text{wobei } K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Zur praktischen Durchführung der Rechnung wird der Plattenbereich mit einem Gitternetz überzogen, dessen Punkte in Abb. 4 angegeben sind. Die Bilder dieser Punkte in der Ebene des Einheitskreises werden mit Hilfe folgender Beziehungen berechnet:

$$\frac{z}{A} = F(\varphi, k) \qquad \text{oder} \qquad \varphi = am\left(\frac{z}{A}\right),$$

$$\cos\varphi = c\,n\,\frac{z}{A} = \frac{(1+\sqrt{3})\left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\right)^{2/3} - 1}{(-1+\sqrt{3})\left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\right)^{2/3} + 1}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\zeta = \frac{\sqrt{\left[(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)\,c\,n\,\frac{z}{A}\right]^3} - \sqrt{\left[1 + c\,n\,\frac{z}{A}\right]^3}}{\sqrt{\left[(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)\,c\,n\,\frac{z}{A}\right]^3} - \left[1 + c\,n\,\frac{z}{A}\right]^3}}. \tag{18}$$

Die Trennung von ζ in Real- und Imaginärteil liefert die Koordinaten der Bildpunkte

$$\xi = \mathrm{Re}\,(\zeta)\,, \qquad \eta = \mathrm{Im}\,(\zeta)\,.$$

Zur Berechnung der *Jakobi*schen Funktionen muß zunächst eine Hilfstafel nach einem von *Legendre*[1] angegebenen Verfahren aufgestellt werden. Hiernach können die Argumente ψ der Beziehung

$$\nu\,F(\varphi, k) = F(\psi, k) \qquad (\nu < 1)$$

berechnet werden. Die Gitternetzeinteilung ist so gewählt, daß die x- und y-Achse in 10 Teile aufgeteilt ist. Den Gitterpunkten auf der x-Achse, die $\sqrt{3}$-mal länger ist als die y-Achse, entsprechen die Werte

$$\nu\sqrt{3} = \nu\,A\,F(\pi, k) \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \qquad (\nu = 0;\,0{,}1;\,0{,}2;\,\ldots\,0{,}9;\,1{,}0)$$

und den Gitterpunkten auf der y-Achse die Werte

$$\nu \cdot 1 = \nu\,A\,F(\varphi_2, k') \quad \text{mit} \quad k'^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Für

$$\nu\,F(\pi, k) = F(\psi, k)$$

und

$$\nu\,F(\varphi_2, k') = F(\psi', k')$$

sind die Winkel ψ bzw. ψ' in Tabelle 1 zusammengestellt. Mit ihnen werden die erforderlichen Werte der *Jakobi*schen Funktionen ermittelt. Tabelle 2 und Abb. 4 enthalten die konforme Abbildung der Gitternetzpunkte.

Für die numerische Auswertung der Regulärteile der *Green*schen Funktion wird zweckmäßig noch eine spezielle Abbildungsrelation zwischen der Randkoordinate s in der z-Ebene und der Randkoordinate Θ des Einheitskreises gebildet. Es wird wieder die *Schwarz-Christoffel*sche

[1] *A. M. Legendre*, Traite des Fonctions elliptiques et des Integrals Euleriennes, Paris 1826.

Tabelle 1

ν	ψ	ψ'
0,1	18,29289929°	10,51769762°
0,2	36,47289112°	20,71302042°
0,3	54,47162633°	30,31324833°
0,4	72,29085279°	39,12810334°
0,5	90,00000000°	47,05859617°
0,6	107,70914721°	54,08619138°
0,7	125,52837367°	60,25206774°
0,8	143,52710888°	65,63530297°
0,9	161,70710071°	70,33498191°
1,0	180,00000000°	74,45773676°

Tabelle 2. *Konforme Abbildung der Gitternetzpunkte*

Punkt	ξ	η	Punkt	ξ	η
00	0	0	33	0,55142670	0,28318553
01	0,18146272	0	34	0,71343006	0,24518384
02	0,35848496	0	35	0,84682220	0,19255962
03	0,52527544	0	36	0,94218985	0,13217270
04	0,67445035	0	37	0,99722201	0,07431732
05	0,79837599	0	40	0	0,42784838
06	0,89156250	0	41	0,19084110	0,42513281
07	0,95279035	0	42	0,38270469	0,41367476
08	0,98577690	0	43	0,56888371	0,38541682
09	0,99816863	0	44	0,74492738	0,33454543
010	1,00000000	0	45	0,88714460	0,26080151
10	0	0,10529195	46	0,98458900	0,17488427
11	0,18217456	0,10411422	50	0	0,53850128
12	0,36015601	0,10011060	51	0,19382632	0,53706215
13	0,52820351	0,09223326	52	0,39336035	0,52730980
14	0,67869903	0,07975142	53	0,59602893	0,49624902
15	0,80358271	0,06314913	54	0,78699694	0,43184046
16	0,89698526	0,04440833	55	0,94280904	0,33333333
17	0,95757299	0,02642072	60	0	0,64967116
18	0,98924241	0,01193116	61	0,19457772	0,65145491
19	0,99999620	0,00273477	62	0,40247647	0,64806861
20	0	0,21133037	63	0,62425774	0,61835183
21	0,18421954	0,20914589	64	0,84090505	0,54118268
22	0,36505833	0,20152405	70	0	0,73982491
23	0,53695845	0,18604996	71	0,19037977	0,76707991
24	0,69156774	0,16093722	72	0,40619312	0,77757082
25	0,81946127	0,12704764	73	0,65350208	0,75692472
26	0,91355094	0,08855840	80	0	0,84890516
27	0,97215179	0,04855630	81	0,17692554	0,88120481
28	0,99975683	0,02205173	82	0,39827448	0,91726629
30	0	0,31873534	90	0	0,94080430
31	0,18730242	0,31593383	91	0,14749316	0,98906308
32	0,37282283	0,30557756	100	0	1,00000000

Gleichung zugrunde gelegt:

$$\frac{dz}{d\zeta} = C_1 \left[(\zeta^2 - 1)^2 (\zeta^2 + 1)\right]^{-1/3} + C_2 . \tag{19}$$

Auf dem Rand ist $\zeta = e^{i\,\Theta}$ und $ds = |dz|$.

Hiermit erhält man nach Umformung aus (19)

$$s = \bar{C}_1 \int (\sin^2 \Theta \cos \Theta)^{-1/3}\, d\Theta + \bar{C}_2 . \tag{20}$$

Mit der Substitution

$$\Theta = \arcsin \sqrt{\frac{v^3}{v^3 + 1}}$$

wird

$$s = A\, F(\varphi, k) + B .$$

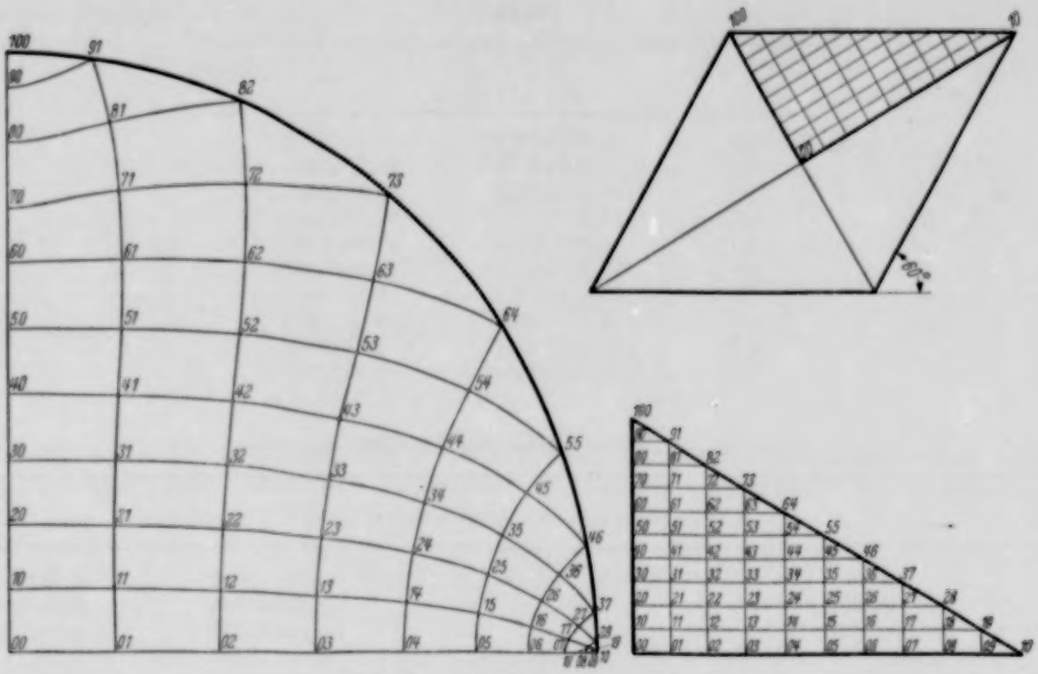


Abb. 4. Konforme Abbildung der Gitternetzpunkte.

Tabelle 3. *Konforme Abbildung der Randpunkte* $s(\Theta)$

Θ	s	Θ	s
0	0	50	1,40926983
0,5	0,29365860	55	1,46643030
1,0	0,36998993	60	1,52364183
2,5	0,50218551	65	1,58183538
5,0	0,63285768	70	1,64214544
10	0,79807712	75	1,70616862
15	0,91496782	80	1,77660551
20	1,00923342	85	1,85958427
25	1,09023704	87,5	1,91159281
30	1,16263038	89	1,95201266
35	1,22914911	89,5	1,96977055
40	1,29159991	90	2,00000000
45	1,35129380		

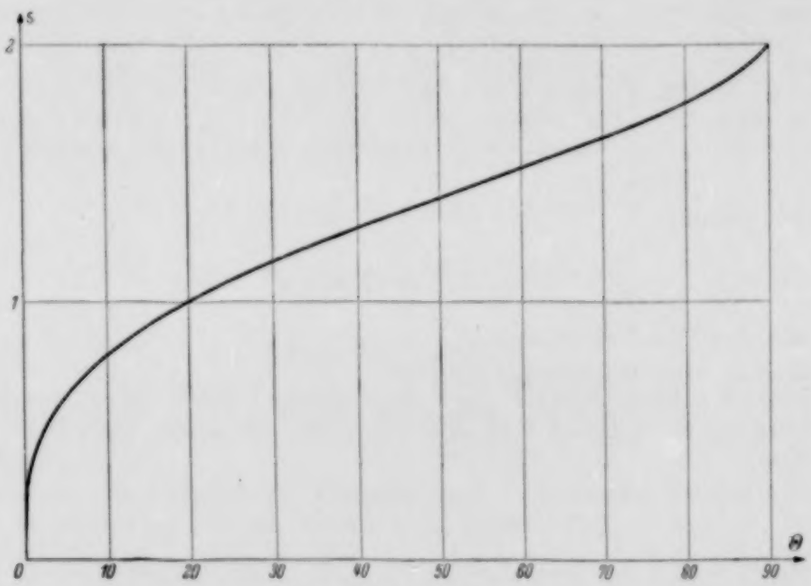


Abb. 5. Funktionverlauf $s(\Theta)$.

Der Modul k und das Argument φ ergeben sich zu

$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \qquad \varphi = \arccos \frac{(1-\sqrt{3})\,v+1}{(1+\sqrt{3})\,v+1}$$

und die Konstanten A und B zu

$$A = \frac{2}{F(\varphi_2, k)} = 0{,}5418\,9515\,, \qquad B = 0\,.$$

Tabelle 3 und Abb. 5 zeigen die Zuordnung der Randpunkte in der z- und ζ-Ebene.

Wie oben erwähnt, wird für den Singularitätenausgleich noch die Reihenentwicklung $s(\Theta)$ benötigt. In der Beziehung (20) kann für die Umgebung der Ecke $\sin\Theta$ bzw. $\cos\Theta$ durch das erste Glied der Reihenentwicklung ersetzt werden, da lediglich die Koeffizienten der Reihenglieder mit den Exponenten < 1 eliminiert werden. Für die Ecke I (Abb. 1) bei $\Theta = 0$ ist für die Randkoordinate s_1

$$s_1 = C_1 \int \frac{d\Theta}{\Theta^{2/3}} = 3\,C_1\,\Theta^{1/3} = K_1\,\Theta^{1/3}\,.$$

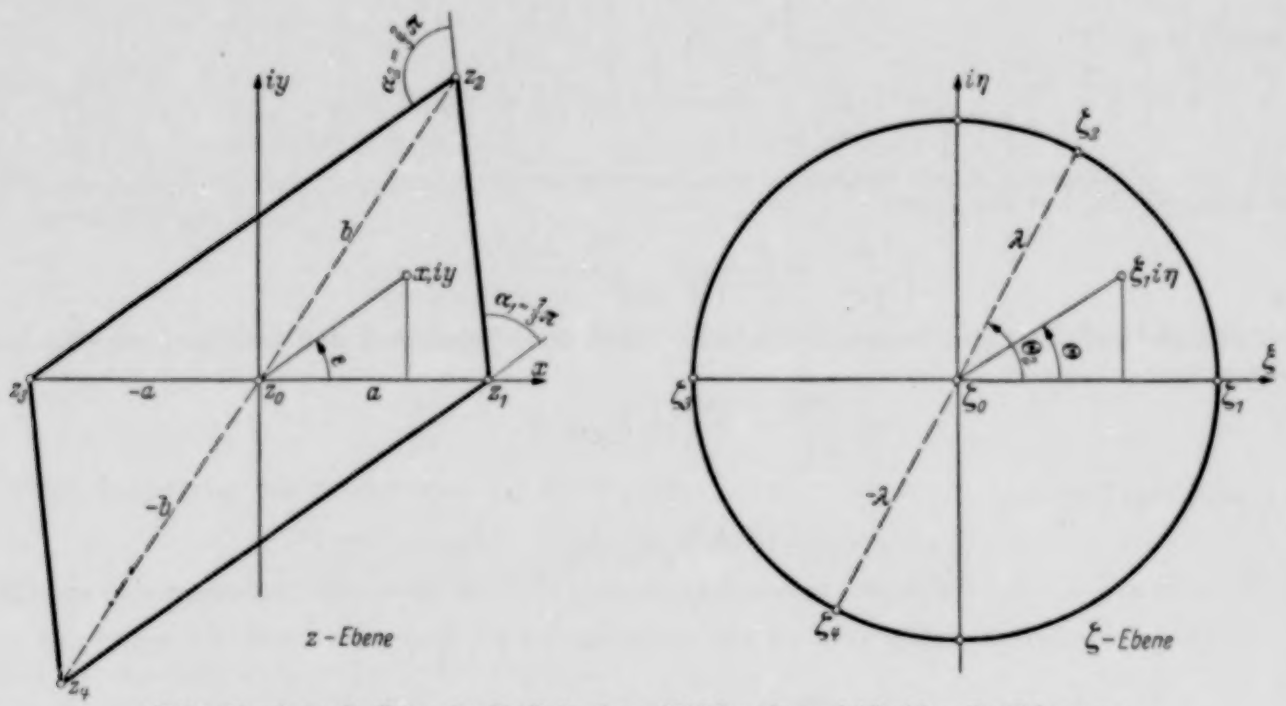


Abb. 6. Zuordnung der Eckpunkte für die konforme Abbildung des ungleichseitigen Parallelogramms.

Für die Ecke II bei $\Theta = \pi/2$ ist für die Randkoordinate s_2

$$s_2 = C_2 \int \frac{d\Theta}{\Theta^{1/3}} = \frac{3}{2}\,C_2\,\Theta^{2/3} = K_2\,\Theta^{2/3}.$$

Die Konstanten K_1 und K_2 ergeben sich zu

$$K_1 = 2\sqrt[4]{3}\,A\,, \qquad K_2 = \sqrt[4]{3}\,A\,.$$

Der Vollständigkeit halber sei noch die Zurückführung des Abbildungsintegrals für ein ungleichseitiges Parallelogramm auf die *Legendre*sche Normalform angegeben. Abb. 6 zeigt die Zuordnung einiger Randpunkte in der z- und ζ-Ebene. Es entsprechen sich

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= 0 \to \zeta_0 = 0\,,\\ z_1 &= a \to \zeta_1 = 1\,,\\ z_2 &= b \to \zeta_2 = \lambda\,,\\ z_3 &= -a \to \zeta_3 = -1\,,\\ z_4 &= -b \to \zeta_4 = -\lambda\,, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

wobei die Größen

$$a = x_1\,, \qquad b = x_2 + i\,y_2\,,$$
$$\lambda = \xi_2 + i\,\eta_2 = \cos\Theta_2 + i\sin\Theta_2$$

vom Seitenverhältnis des Parallelogramms abhängige komplexe Konstanten sind. Somit lautet das Abbildungsintegral

$$z = C_1 \int \frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)^{1/3}(\zeta-\lambda)^{2/3}(\zeta+1)^{1/3}(\zeta+\lambda)^{2/3}} + C_2$$

und nach Umformung

$$z = C_1 \int [(\zeta^2-1)(\zeta^2-\lambda^2)^2]^{-1/3} + C_2 .$$

Mit der Substitution

$$\zeta = \sqrt{\frac{\lambda+\lambda^2 t^3}{\lambda - t^3}} \tag{22}$$

wird

$$z = -\frac{3}{2} C_1 \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^6 - \frac{\lambda^2+1}{\lambda} t^3 + 1}} + C_2 .$$

Setzt man

$$\frac{t^2+1}{t} = u , \tag{23}$$

so erhält man

$$z = -\frac{3}{2} \frac{C_1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} \left[\int \frac{du}{\sqrt{(u-2)\left(u^3 - 3u - \frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right)}} + \int \frac{du}{\sqrt{(u+2)\left(u^3 - 3u - \frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right)}} \right]. \tag{24}$$

Das Integral (24) hat die Form

$$\int \frac{du}{\sqrt{P'}} = \int \frac{du}{\sqrt{(a-u)(b-u)(c-u)(d-u)}} .$$

Es läßt sich[1] auf die *Legendre*sche kanonische Form transformieren, und zwar auf ein elliptisches Integral erster Gattung

$$\int \frac{du}{\sqrt{P}} = \bar{A}\, F(\varphi, k) + \bar{B} .$$

Hier wird also (24) zu

$$z = A\,[F_1(\varphi_1, k_1) + F_2(\varphi_2, k_2)] + B .$$

Die Wurzeln a, b, c, d der Polynome in den Integranden sind alle reell. Sie berechnen sich aus (24) zu

$$a = \pm 2 , \qquad b = 2\cos\frac{\Theta_2}{3} ,$$

$$c = -2\cos\left(\frac{\Theta_2}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \qquad d = -2\cos\left(\frac{\Theta_2}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Die Konstanten A, B, das Argument φ und der Modul k sind abhängig vom Eckenwinkel Θ_2 (Abb. 6). Über die zu (22) und (23) inverse Beziehung

$$u = \frac{\sqrt[3]{\lambda^2}\sqrt[3]{(\zeta^2-1)^2} + \sqrt[3]{(\zeta^2-\lambda^2)^2}}{\sqrt[3]{\lambda(\zeta^2-\lambda^2)(\zeta^2-1)}}$$

und aus der Zuordnung der Randpunkte (21) können der Winkel Θ_2 und damit der Modul k und die Konstanten A und B bestimmt werden.

b) Der Ausgleich der Eckensingularitäten. Der Aufbau des Regulärteils gliedert sich, wie erwähnt, in zwei Teile. Im ersten Teil, dem Singularitätenausgleich, werden die durch die konforme Abb. in den Eckpunkten auftretenden Singularitäten ausgeglichen. Aufgrund der Abbildungsformel haben die zum Ausgleich zu benutzenden Funktionen zweckmäßig die Form

$$f(\zeta) = (\zeta - \zeta_K)^{n/3} .$$

Für die numerische Auswertung werden die Real- bzw. die Imaginärteile dieser Funktionen herangezogen:

$$\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix} (\zeta-\zeta_K)^{n/3} = |(\zeta-\zeta_K)^{n/3}| \begin{Bmatrix}\cos n/3\,\Theta_i\\ \sin n/3\,\Theta_i\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varphi_{Kn}\\ \psi_{Kn}\end{Bmatrix}.$$

[1] *P. F. Byrd* u. *D. Friedmann*, Handbook of Elliptic Integrals for Engeneers and Physicists, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

Beim Durchgang durch die Ecke K wird $(\zeta - \zeta_K) = 0$ und das Argument Θ_i erfährt einen Sprung nm $-\pi$. Deshalb ist der Funktionsverlauf in verschiedene Definitionsbereiche zu unterteilen.

Auf dem Kreisrand für $\varrho = 1$ gilt dann der folgende Verlauf der Funktionen von $K = 1$ bis $K = 4$ gemäß Tabelle 4.

Tabelle 4

Definitionsbereich			$0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \Theta < \pi$	$\pi < \Theta < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < \Theta < 2\pi$
Funktion		Betrag	Argument Θ_i	Argument Θ_i	Argument Θ_i	Argument Θ_i
$(\zeta - \zeta_1)^{n/3}$	φ_{1n} ψ_{1n}	$\left(2 \sin \frac{\Theta}{2}\right)^{n/3}$	$\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$
$(\zeta - \zeta_2)^{n/3}$	φ_{2n} ψ_{2n}	$\left[2 \sin \left(\frac{\Theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]^{n/3}$	$\left(\frac{\Theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} - \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} - \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} - \frac{5\pi}{4}\right)$
$(\zeta - \zeta_3)^{n/3}$	φ_{3n} ψ_{3n}	$\left[2 \sin \left(\frac{\Theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]^{n/3}$	$\frac{\Theta}{2}$	$\frac{\Theta}{2}$	$\left(\frac{\Theta}{2} - \pi\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} - \pi\right)$
$(\zeta - \zeta_4)^{n/3}$	φ_{4n} ψ_{4n}	$\left[2 \sin \left(\frac{\Theta}{2} - \frac{3}{4}\pi\right)\right]^{n/3}$	$\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\Theta}{2} - \frac{3}{4}\pi\right)$

Für die Erfüllung der Randbedingungen interessieren außerdem die Normalableitungen dieser Funktionen $f(\zeta)$ am Rand

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial n} = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial n} .$$

Hier ist $\partial\varrho/\partial n = |d\zeta/dz|$ der Maßstabsfaktor der konformen Abbildung. Aus Gleichung (20) folgt

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}\,A} (\sin^2 \Theta \cos \Theta)^{1/3} .$$

Die Normalableitung der Funktionen $f(\zeta)$ lautet also

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial n} = \frac{n}{3} \left|(\zeta - \zeta_K)^{\left(\frac{n}{3} - 1\right)}\right| e^{i\left[\Theta + \left(\frac{n}{3} - 1\right)\Theta i\right]} \cdot \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| .$$

Diese Funktionen haben noch nicht die Symmetrien der Fundamentalintegrale (10) bis (15). Sie müssen Symmetrie zur x- und y-Achse besitzen.

Die Symmetrieeigenschaften finden Ausdruck in den Beziehungen

$$f(\Theta) = f(\pi - \Theta) = f(\pi + \Theta) = f(2\pi - \Theta) .$$

Bildet man folgende Kombinationen, die sich aus den Realteilen φ_{Kn} und den Imaginärteilen ψ_{Kn} der Funktionen zusammensetzen, so erhält man Funktionen, die den Symmetriebedingungen genügen:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \varphi_{11} + \sqrt{3}\,\psi_{11} + 2\,\varphi_{31} , \\
g_2 &= \sqrt{3}\,\varphi_{21} - \psi_{21} + \sqrt{3}\,\varphi_{41} + \psi_{41} , \\
g_3 &= -\varphi_{12} + \sqrt{3}\,\psi_{12} + 2\,\varphi_{32} , \\
g_4 &= \varphi_{22} - \sqrt{3}\,\psi_{22} + \varphi_{42} + \sqrt{3}\,\psi_{42} , \\
g_5 &= \varphi_{14} + \sqrt{3}\,\psi_{14} - 2\,\varphi_{34} , \\
g_6 &= \varphi_{24} + \sqrt{3}\,\psi_{24} + \varphi_{44} - \sqrt{3}\,\psi_{44} , \\
g_7 &= \varphi_{15} - \sqrt{3}\,\psi_{15} + 2\,\varphi_{35} , \\
g_n &= \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Es handelt sich hier um Potentialfunktionen. Man braucht aus ihnen keine Bipotentialfunktionen zu konstruieren, wenn man die Fundamentalintegrale ebenfalls in Potentialfunktionen U, V zerlegt, etwa in der Form

$$G_0 = U + r^2 V .$$

Dies gilt sowohl für die Durchbiegung wie für die Krümmungen. Die aus (10) bis (15) gewonnenen Werte U und V der Fundamentalintegrale, die kurz „Fundamentalgrößen" genannt werden sollen,

sind

$$U_{G_0} = 0\,, \qquad V_{G_0} = \ln r\,,$$

$$U_{kx0} = \ln r^2 + 2\,, \qquad V_{kx0} = \frac{x^2 - y^2}{r^4}\,,$$

$$U_{ky0} = \ln r^2 + 2\,, \qquad V_{ky0} = -\frac{x^2 - y^2}{r^4}\,,$$

$$\frac{\partial U_{G_0}}{\partial n} = 0\,, \qquad \frac{\partial V_{G_0}}{\partial n} = \frac{\sqrt{3}}{2\,r^2}\,,$$

$$\frac{\partial U_{kx0}}{\partial n} = \frac{\sqrt{3}}{r^2}\,, \qquad \frac{\partial V_{kx0}}{\partial n} = \frac{-x^3 - 3\sqrt{3}\,x^2 y + 3\,x\,y^2 + \sqrt{3}\,y^3}{r^6}\,,$$

$$\frac{\partial U_{ky0}}{\partial n} = \frac{\sqrt{3}}{r^2}\,, \qquad \frac{\partial V_{ky0}}{\partial n} = -\frac{-x^3 - 3\sqrt{3}\,x^2 y + 3\,x\,y^2 + 3\,y^3}{r^6}\,.$$

Welche Funktionen g sind zum Ausgleich dieser Fundamentalgrößen heranzuziehen? Die Ordnung der durch die konforme Abbildung entstandenen Singularitäten ist für die Ecke I (bei $\Theta = 0$) eine andere als für die Ecke II (bei $\Theta = \pi/2$), da sie durch den Außenwinkel der polygonalen Umrandung festgelegt ist. So haben die in der Eckenumgebung nach Θ entwickelten Fundamentalgrößen an Ecke I die Potenzen $\frac{1}{3}n$ ($n = 1, 2, 3$) und an Ecke II die Potenzen $\frac{2}{3}n$. Zum Ausgleich der Fundamentalgrößen an Ecke I werden die aus $(\zeta - \zeta_1)^{n/3}$ und $(\zeta - \zeta_3)^{n/3}$ gebildeten Funktionen, nämlich $g_1, g_3, g_5 \ldots$ herangezogen, zum Ausgleich an Ecke II die Funktionen $g_4, g_6, g_8 \ldots$, die aus $(\zeta - \zeta_2)^{n/3}$ und $(\zeta - \zeta_4)^{n/3}$ gebildet sind. Die Funktion g_2 entfällt, da an Ecke II keine Potenz 1/3 auftritt. Wie erwähnt, sollen die Koeffizienten der Reihenglieder mit den Potenzen $n < 3$ in der Funktion und mit der Potenz $n = 0$ in der Normalableitung eliminiert werden. Eine Aufstellung der Reihenkoeffizienten aller Fundamentalgrößen und der zu überlagernden Funktionen findet sich in der Tabelle 5. Hier ist zu bemerken, daß zwischen den Koeffizienten lineare Abhängigkeiten auftreten, die schon an anderer Stelle[1] begründet wurden. Abhängig werden die Gleichungen Nr. 2 und 4, 3 und 5, 8 und 9.

Tabelle 5. *Koeffizienten der Funktionen und der Fundamentalintegrale für den Singularitätenausgleich*

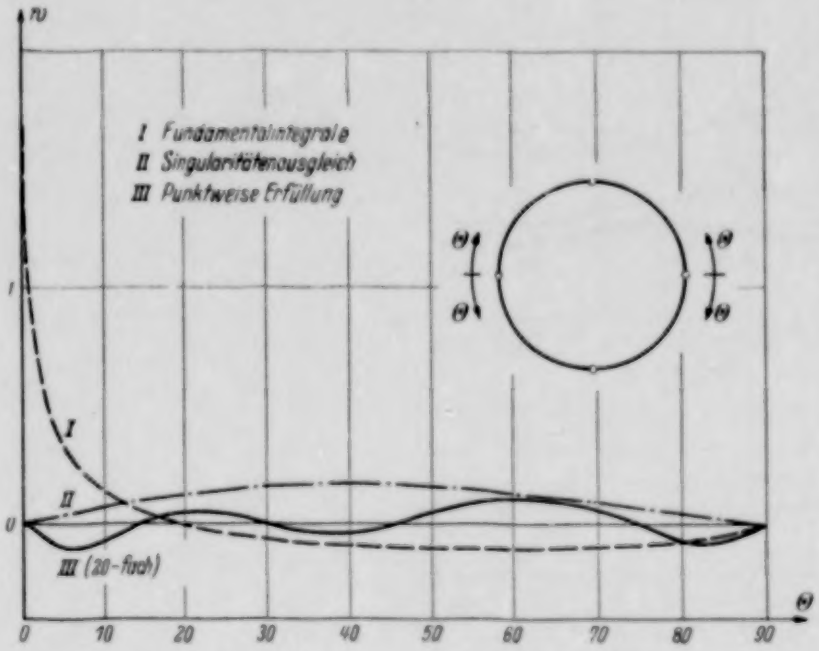
Nr.			c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	G_0		k_{x0}, k_{y0}	
			g_1	g_2	g_4	g_5	g_6	g_7	U	V	U	V
1		Θ^0	$\sqrt[3]{2^4}$	$\sqrt[3]{2^5}$	$\sqrt[3]{2^4\sqrt{3}}$	$-\sqrt[3]{2^7}$	$-\sqrt[3]{2^5}$	$-\sqrt[6]{2^{11}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$	0	$\frac{\ln 3}{2}$	$\ln 3 + 2$	$\frac{1}{3}$
2	F_{I}	$\Theta^{1/3}$	$\sqrt{3}$	0	0	0	0	0	0	$-\sqrt[4]{3}\,A$	$-2\sqrt[4]{3}\,A$	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\,A$
3		$\Theta^{2/3}$	0	1	0	0	0	0	0	$-\frac{A^2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2A^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2A^2}{\sqrt{3}}$
4	$\frac{\partial F_{\mathrm{I}}}{\partial n}$	Θ^0	$-\frac{1}{2\sqrt[4]{3}\,A}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$
5		$\Theta^{1/3}$	0	$-\frac{\sqrt[4]{3}}{A}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}A$	$\frac{2}{\sqrt[4]{3}}A$	$-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}A$
6		Θ^0	$\sqrt[6]{2^7\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$\sqrt[3]{2^4\sqrt{3}}$	$\sqrt[3]{2^5}$	$-\sqrt[3]{2^5}$	$-\sqrt[3]{2^7}$	$-\sqrt[3]{2^8}$	0	0	2	-1
7	F_{II}	$\Theta^{1/3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8		$\Theta^{2/3}$	0	0	1	0	0	0	0	$-\frac{\sqrt[4]{3}}{2}A$	$-\sqrt[4]{3}\,A$	$-\sqrt[4]{3}\,A$
9	$\frac{\partial F_{\mathrm{II}}}{\partial n}$	Θ^0	0	0	$-\frac{\sqrt[4]{3}}{A}$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

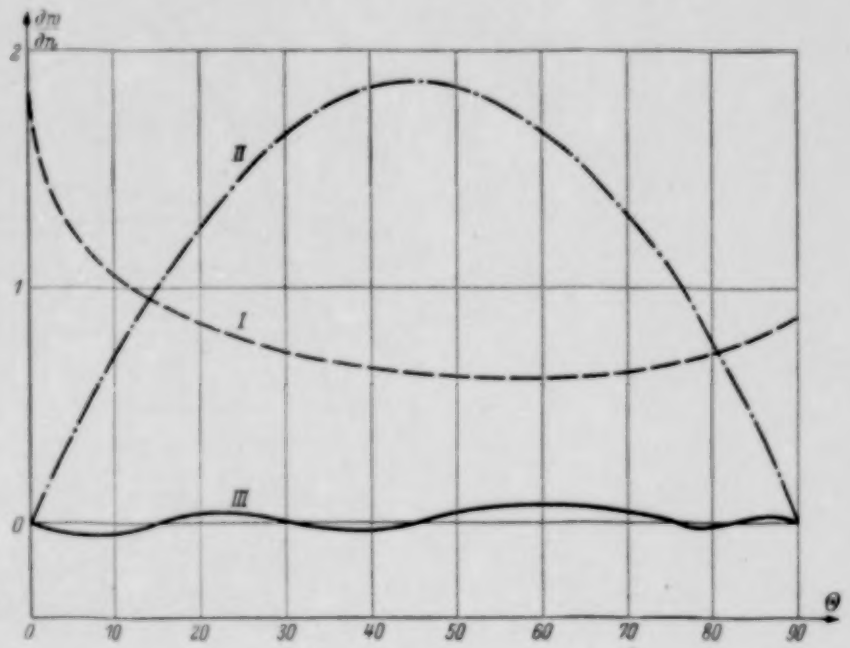
[1] Siehe die Arbeit *Böhning* in Fußnote 3 von Seite 268.

Dadurch wird das Gleichungssystem auf 5 Gleichungen reduziert. Die Koeffizienten dieses Systems ergeben die Tabelle 6, und die daraus errechneten Randverläufe der so ausgeglichenen Fundamentalintegrale sind in Abb. 7 bis 12 als Kurven mit der Bezeichnung II aufgetragen.

Tabelle 6

Nr.	Funktion	V_{G_0}	$U_{k_{x0}}$ bzw. $U_{k_{y0}}$	$V_{k_{x0}}$ bzw. $-V_{k_{y0}}$
1	g_1	+ 0,4117 5127	+ 0,8235 0255	— 0,2745 0085
2	g_3	+ 0,1695 3911	+ 0,3390 7822	— 0,3390 7822
3	g_4	+ 0,3565 8706	+ 0,7131 7413	+ 0,7131 7413
4	g_5	+ 0,4530 6987	+ 1,1496 1207	+ 0,8433 8273
5	g_6	+ 0,4403 7411	+ 1,1242 2054	— 0,8103 2129





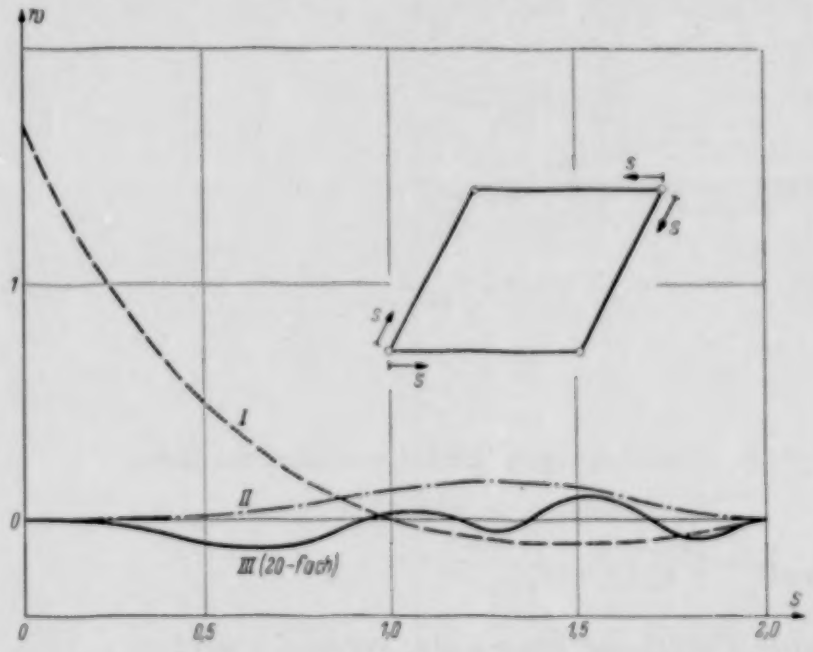


Abb. 7.

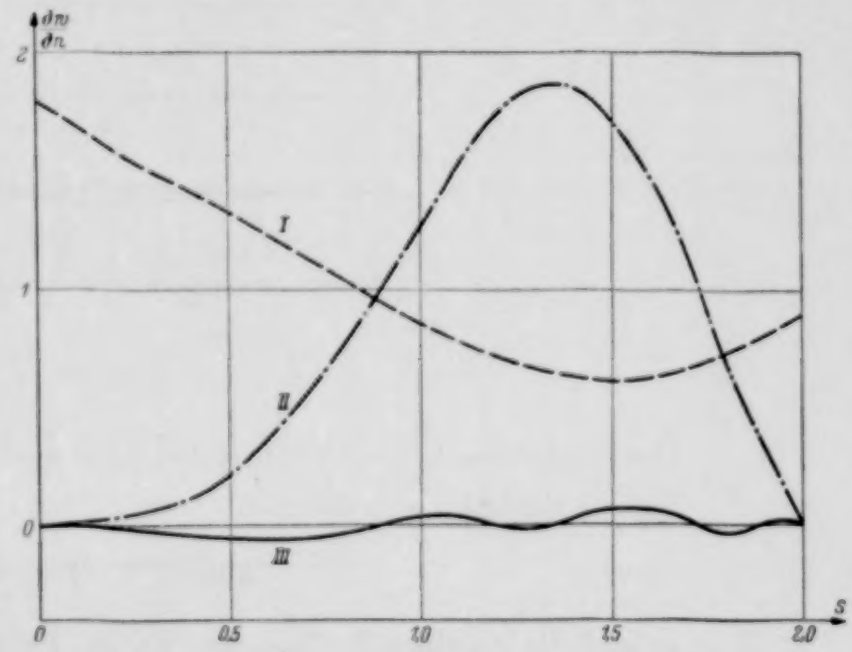


Abb. 8.

Abb. 7—12. Randverläufe der Fundamentalintegrale (I), nach dem Ausgleich der Eckensingularitäten (II), nach der punktweisen Erfüllung der Randbedingungen (III).

c) Punktweise Erfüllung der Randbedingungen für den Rest des Randbereiches. Die so berechneten regulären Anteile der *Green*schen Funktionen sind so zu ergänzen, daß die Randbedingungen in den übrigen Randteilen, und zwar für eine gewisse Anzahl von p einzelnen Randpunkten, erfüllt sind. Es werden in der Kreisebene definierte Potentialfunktionen der Art

$(\zeta) = \zeta^m$ verwendet. Den Symmetrieverhältnissen entsprechen die Funktionen

$$f_m = \mathrm{Re}\,(\zeta^{2m}) = \varrho^{2m} \cdot \cos 2m\Theta \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Die zugehörigen den Symmetrien genügenden Bipotentialfunktionen u_m erhält man durch Multiplikation mit r^2

$$u_m = r^2 f_m\,.$$

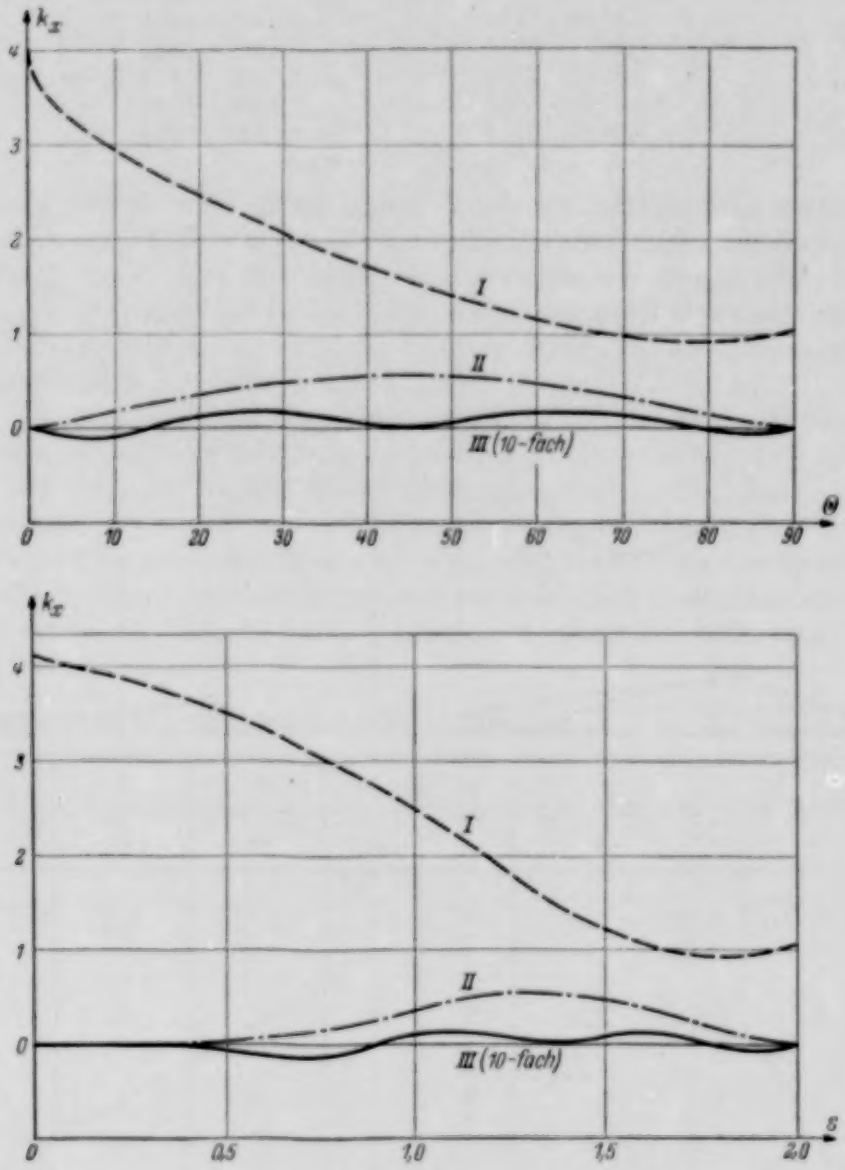


Abb. 9.

Die Funktionen $\left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}\right\}(\zeta^{2m+1})$ erfüllen nicht die Symmetriebedingungen. Bildet man aber aus ihnen Bipotentialfunktionen der Art

$$x\,\mathrm{Re}\,(\zeta^{2m+1}) \qquad \text{und} \qquad y\,I_m\,(\zeta^{2m+1}),$$

so sind die gestellten Bedingungen erfüllt. Folgende Funktionen können also verwendet werden:

$$f_m = \varrho^{2m} \cos 2m\Theta\,,$$

$$u_m = r^2\,\varrho^{2m} \cos 2m\Theta\,,$$

$$v_m = x\,\varrho^{(2m+1)} \cos (2m+1)\Theta\,,$$

$$w_m = y\,\varrho^{(2m+1)} \sin (2m+1)\Theta\,.$$

Die Normalableitungen dieser Funktionen ergeben sich, wenn lediglich die Randwerte ($\varrho = 1$) der Normalableitungen angegeben sind, zu

$$\frac{\partial f_m}{\partial n} = 2\,m\cos 2\,m\,\Theta\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|,$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial n} = \cos 2\,m\,\Theta\left[r^2\,2\,m\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| + \sqrt{3}\right],$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial n} = \cos(2\,m+1)\,\Theta\left[x\,(2\,m+1)\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial n} = \sin(2\,m+1)\,\Theta\left[y\,(2\,m+1)\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| + \frac{1}{2}\right].$$

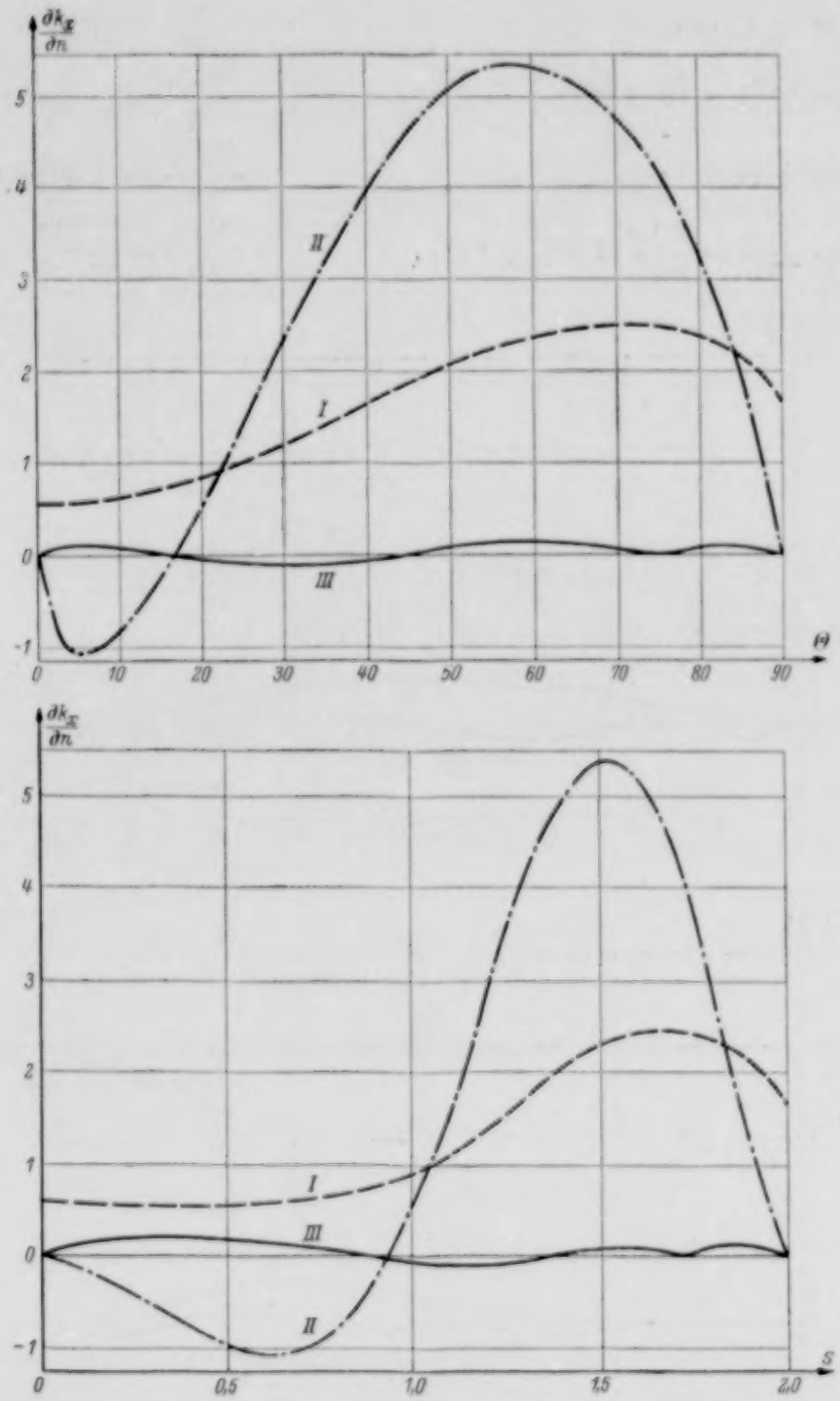


Abb. 10.

Wie erwähnt, müssen diese Funktionen, ehe sie den „ausgeglichenen Fundamentalintegralen" überlagert werden, in den Ecken im Wert und in der ersten Ableitung zu Null werden, damit sie das gleiche Verhalten wie die „ausgeglichenen Fundamentalintegrale" aufweisen. Sie werden daher in Potenzreihen nach Θ entwickelt und entsprechend den Fundamentalintegralen ausgeglichen.

Werden nur die zum Ausgleich notwendigen Glieder der Reihenentwicklungen angegeben, und bezeichnet der Index *I* bzw. *II* die Entwicklung an Ecke I bzw. Ecke II, so ergibt sich

$$f_{1\,m} = 1 + \cdots, \qquad \frac{\partial f_{m\,1}}{\partial n} = 0 + \cdots,$$

$$u_{1\,m} = 3 - 6\sqrt[4]{3}\, A\, \Theta^{1/3} + \cdots, \qquad \frac{\partial u_{m\,1}}{\partial n} = \sqrt{3} + \cdots,$$

$$v_{1\,m} = \sqrt{3} - \sqrt[4]{3^3}\, A\, \Theta^{1/3} + \cdots, \qquad \frac{\partial v_{m\,1}}{\partial n} = \frac{1}{2} + \cdots,$$

$$w_{1\,m} = 0 + \cdots, \qquad \frac{\partial w_{m\,1}}{\partial n} = 0 + \cdots,$$

$$f_{\mathrm{II}\,m} = \pm 1 \ldots, \qquad \frac{\partial f_{m\,\mathrm{II}}}{\partial n} = \pm (0 + \cdots),$$

$$u_{\mathrm{II}\,m} = \pm \left(1 - \sqrt[4]{3}\, A\, \Theta^{2/3} + \cdots\right), \qquad \frac{\partial u_{m\,\mathrm{II}}}{\partial n} = \pm \left(\sqrt{3} + \cdots\right),$$

$$v_{\mathrm{II}\,m} = \pm (0 + \cdots), \qquad \frac{\partial v_{m\,\mathrm{II}}}{\partial n} = \pm (0 + \cdots),$$

$$w_{\mathrm{II}\,m} = \pm \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt[4]{3}\, A\, \Theta^{2/3} + \cdots\right), \qquad \frac{\partial w_{m\,\mathrm{II}}}{\partial n} = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cdots\right).$$

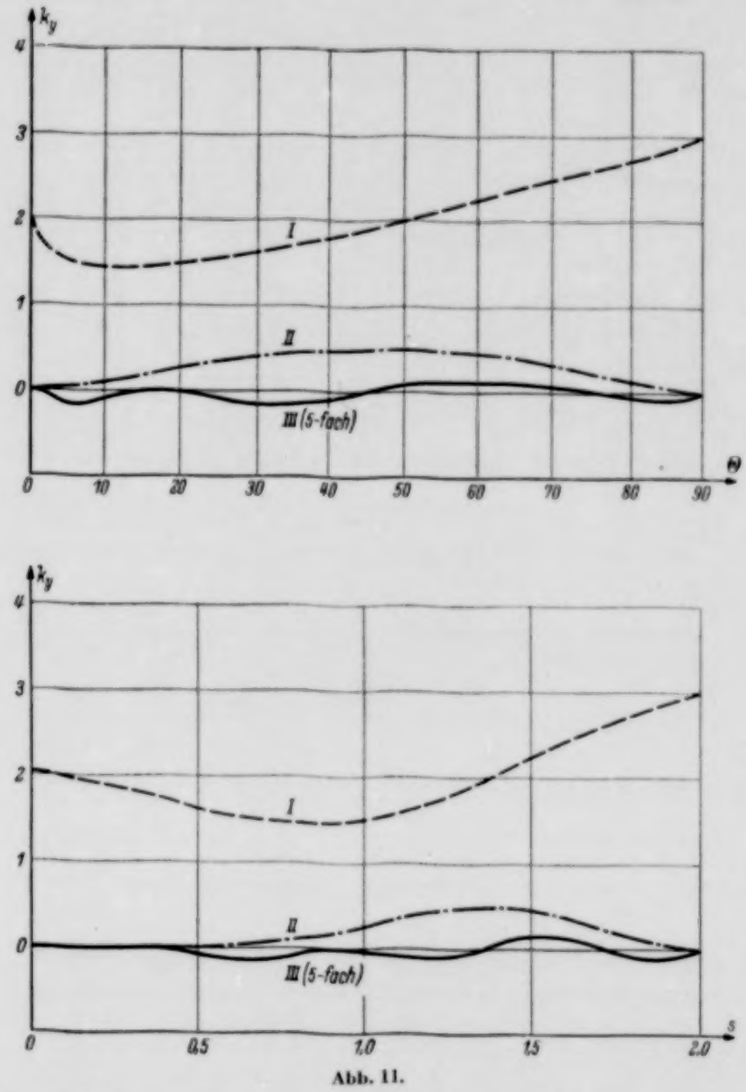


Abb. 11.

Für die Reihenentwicklungen an Ecke II ist für gerades m das positive, für ungerades m das negative Vorzeichen zu wählen. Es zeigt sich, daß auch hier lineare Abhängigkeiten zwischen den Koeffizienten der Reihenglieder auftreten. Werden die Koeffizienten der Reihenglieder mit dem

Exponenten 0 an beiden Ecken in der Funktion und in der Normalableitung eliminiert, so sind gleichzeitig die Koeffizienten der Reihenglieder mit dem Exponent 1/3 an Ecke I bzw. 2/3 an Ecke II in den Funktionen eliminiert, d. h. die gestellte Bedingung, daß der Randverlauf der Funktionen in den Ecken den Wert Null und eine horizontale Tangente haben sollen, ist erfüllt.

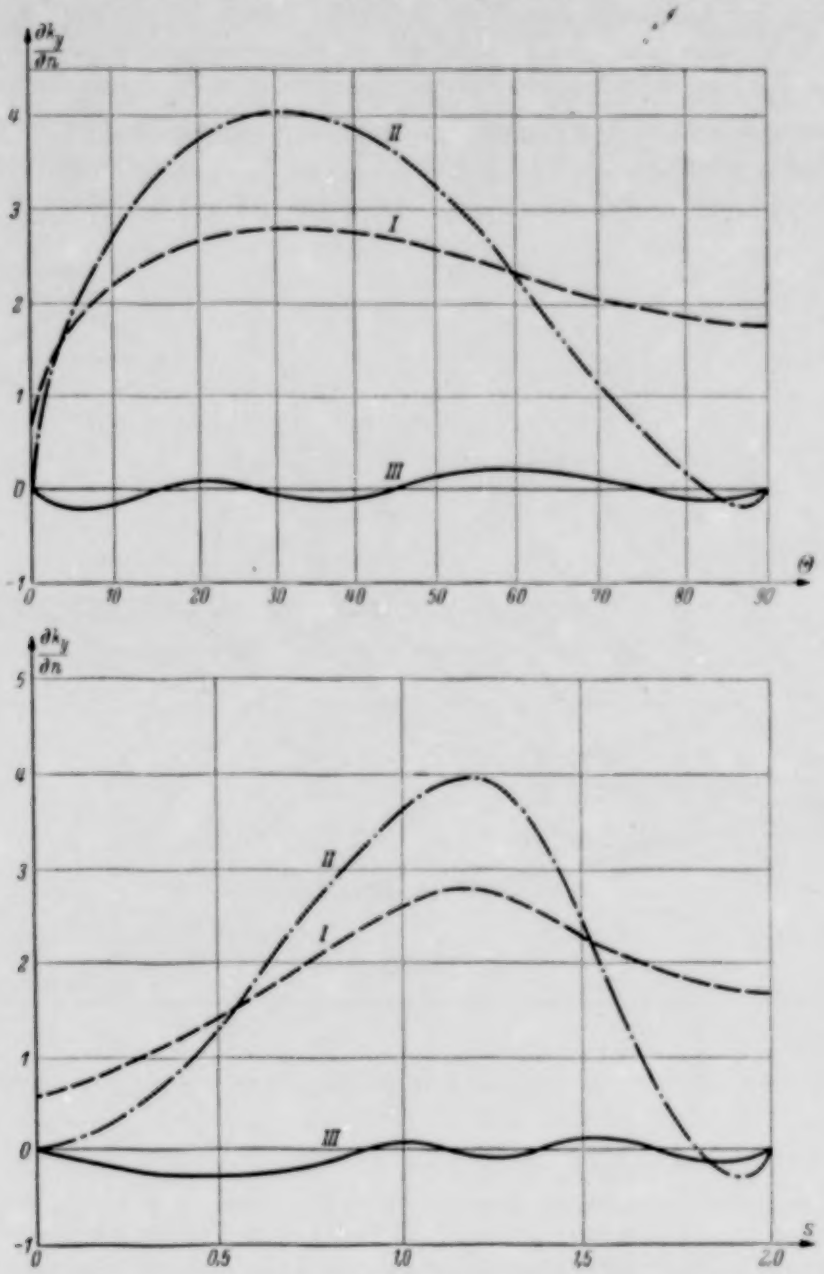


Abb. 12.

Dieser Ausgleich wird gleichzeitig mit der Erfüllung der Randbedingungen in einzelnen Randpunkten, und zwar für die Punkte

$$\Theta = 15°,\ 45°,\ 75° \quad \text{für} \quad G,\ k_x \quad \text{und} \quad k_y,$$

$$\Theta = 15°,\ 45°,\ 75° \quad \text{für} \quad \frac{\partial G}{\partial n},\ \frac{\partial k_x}{\partial n} \quad \text{und} \quad \frac{\partial k_y}{\partial n}$$

durchgeführt. Es ergeben sich die Koeffizienten von Tabelle 7 für das Gleichungssystem der Biegeeinflußfläche.

Tabelle 7

Nr.	Funktion		Nr.	Funktion	
1	f_0	−0,4396 3120	6	u_1	−0,3177 3964
2	u_0	+0,1816 2121	7	v_1	−0,2072 3731
3	v_0	+0,8385 0626	8	w_1	+0,8776 9985
4	w_0	−0,0287 9557	9	f_2	+0,3929 0754
5	f_1	−0,4999 7146	10	u_2	−0,0461 1314

Die auf diese Weise erreichte Näherung ist bereits ausreichend. Die größte Randabweichung für die Biegefläche z. B. beträgt noch 0,0341. Der Durchbiegungswert im Aufpunkt ergibt sich zu 0,43963. Durch Überlagerung der Funktion v_2 konnten die Randabweichungen allgemein verkleinert werden. Man erhält nunmehr für die Biegefläche als größte Randabweichung 0,00871 und für die Durchbiegung im Aufpunkt den Wert 0,43943. Damit ist die gute Konvergenz des Verfahrens bewiesen. Weiterhin zeigt sich, daß die Randabweichungen sich auf die großen maßgebenden Ordinaten der Einflußfläche im Platteninneren nur in geringem Maße auswirken.

Nach Überlagerung der Funktion v_2 ergeben sich die Konstanten von Tabelle 8 und die nach vorhandenen Randabweichungen sind in den Abb. 7 und 8 als Kurven mit der Bezeichnung III dargestellt.

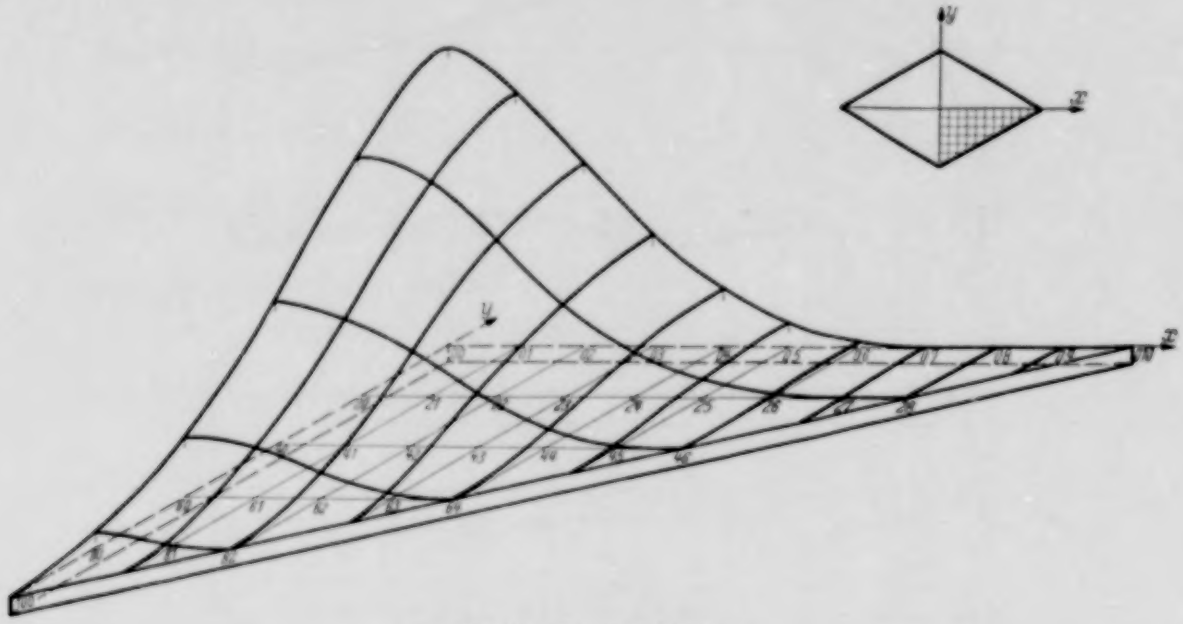


Abb. 13. Biegeeinflußfläche.

Tabelle 8

Nr.	Funktion		Nr.	Funktion	
1	f_0	−0,4394 3128	7	v_1	−0,3897 8550
2	u_0	−0,0380 4503	8	w_1	+0,2982 0654
3	v_0	+0,4799 6729	9	f_2	+0,2620 3212
4	w_0	+0,7472 6331	10	u_2	−0,0959 3079
5	f_1	+0,0471 2918	11	v_2	+0,0602 4096
6	u_1	+0,0905 5258			

Tabelle 9

Nr.	Funktion		Nr.	Funktion	
1	f_0	−0,9009 9424	7	v_1	−2,0211 1906
2	u_0	−0,0120 2558	8	w_1	−0,5359 5679
3	v_0	+1,7308 4736	9	f_2	+0,5928 3854
4	w_0	+1,1287 2467	10	u_2	−0,3681 4183
5	f_1	+0,5241 9066	11	v_2	+0,0408 1633
6	u_1	+0,4521 7910			

Nachdem die einzelnen Funktionen für verschiedene Punkte der Kreisebene ermittelt sind, lassen sich die Einflußflächen für die Punkte berechnen, und sie können dann in die Bildpunkte der Plattenebene übertragen werden. Die so ermittelte Biegeeinflußfläche ist in Abb. 13 dargestellt.

Die Durchbiegung in Plattenmitte unter der Einwirkung einer Einzellast P ergibt sich hieraus zu

$$w = 0{,}0175 \frac{P a^2}{N},$$

die Durchbiegung unter Einwirkung einer stetig verteilten konstanten Last p ergibt sich zu

$$w = 0{,}0124 \frac{p\,a^4}{N}.$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen für die Einflußflächen der Krümmungen k_x und k_y können die gleichen Funktionen des Gleichungssystems der Biegeeinflußfläche benutzt werden. Es ändern sich lediglich die auf der rechten Seite stehenden ausgeglichenen Fundamentalintegrale. Hier konnten ebenfalls durch Überlagerung der Funktion v_2 die Randabweichungen verkleinert werden. Die größten Abweichungen ergeben sich für die k_x-Einflußfläche zu 0,00972 und für die k_y-Einflußfläche zu 0,01834. Der Verlauf der Randabweichungen findet sich in den Abb. 9 bis 12 als Kurven

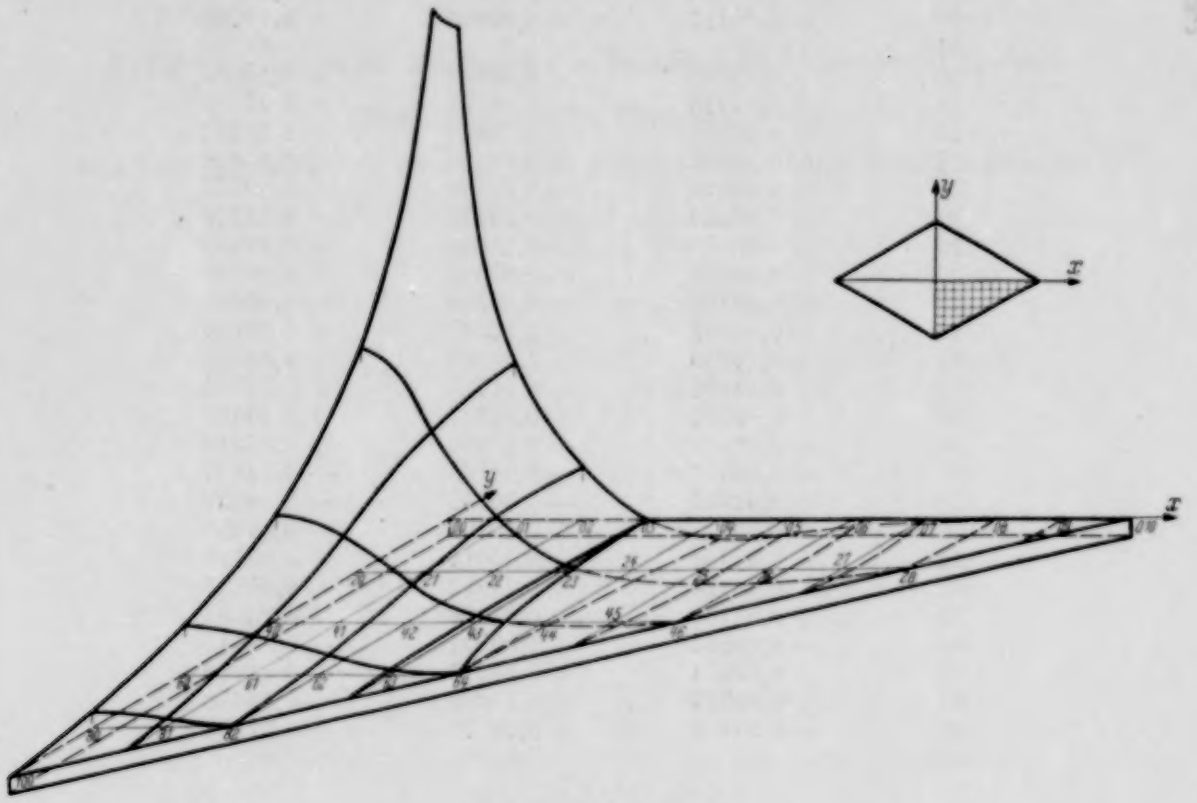


Abb. 14. m_x-Einflußfläche.

mit der Bezeichnung III. Die zur k_x-Einflußfläche gehörenden Konstanten erhalten die Werte von Tabelle 9 und die zur k_y-Einflußfläche gehörenden die Werte von Tabelle 10. In Abb. 14 und 15 sind die Einflußflächen der Momente m_x und m_y für eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0{,}3$ dargestellt. Tabelle 11 enthält die Ordinaten der drei berechneten Einflußflächen.

Das Moment m_x unter Einwirkung einer stetig verteilten konstanten Last p ergibt sich (für $r = 0$, Seitenlänge a) zu

$$m_x = 0{,}0084 \frac{p\,a^4}{N}$$

und das Moment m_y zu

$$m_y = 0{,}0183 \frac{p\,a^4}{N}.$$

Tabelle 10

Nr.	Funktion		Nr.	Funktion	
1	f_0	−0,6148 4136	7	v_1	+0,2815 7377
2	u_0	+0,1456 4245	8	w_1	+2,2118 5244
3	v_0	+0,7473 5758	9	f_2	+0,4479 3770
4	w_0	+0,6907 2122	10	u_2	+0,0522 4480
5	f_1	−0,9274 6943	11	v_2	+0,2347 4187
6	u_1	−0,5626 7831			

Tabelle 11. *Ordinaten der Einflußflächen ($8\pi N$-fach)*

Punkt	w	m_x	m_y
00	+ 0,43943	∞	∞
01	+ 0,37661	+ 2,31770	+ 3,87713
02	+ 0,27089	+ 0,73812	+ 2,17527
03	+ 0,16761	+ 0,04416	+ 1,28498
04	+ 0,08670	− 0,23451	+ 0,75741
05	+ 0,03524	− 0,28429	+ 0,44068
06	+ 0,00779	− 0,20857	+ 0,27236
07	+ 0,00363	− 0,13098	+ 0,12888
08	+ 0,00265	− 0,04089	+ 0,06285
09	+ 0,00112	− 0,00866	+ 0,00568
010	0	0	0
20	+ 0,35438	+ 3,30604	+ 2,15582
21	+ 0,31410	+ 2,04721	+ 2,03705
22	+ 0,22931	+ 0,73804	+ 1,52357
23	+ 0,13938	+ 0,07207	+ 0,98810
24	+ 0,06836	− 0,19390	+ 0,59771
25	+ 0,02514	− 0,23258	+ 0,34278
26	+ 0,00410	− 0,17466	+ 0,19565
27	+ 0,00239	− 0,05691	+ 0,08719
28	+ 0,00308	− 0,00208	− 0,00069
40	+ 0,21393	+ 1,58587	+ 0,59155
41	+ 0,19050	+ 1,20762	+ 0,61731
42	+ 0,13420	+ 0,53781	+ 0,57714
43	+ 0,08333	+ 0,02827	+ 0,39322
44	+ 0,02672	− 0,10790	+ 0,25314
45	+ 0,00413	− 0,09180	+ 0,11417
46	+ 0,00492	− 0,00405	− 0,00539
60	+ 0,08822	+ 0,70400	− 0,03458
61	+ 0,07354	+ 0,55014	+ 0,00129
62	+ 0,03124	+ 0,29267	+ 0,09223
63	+ 0,01108	+ 0,01206	+ 0,05263
64	− 0,00545	+ 0,00537	− 0,00143
80	+ 0,02533	+ 0,19673	− 0,18849
81	+ 0,00935	+ 0,14000	− 0,10472
82	− 0,00486	+ 0,00777	+ 0,01623
100	0	0	0

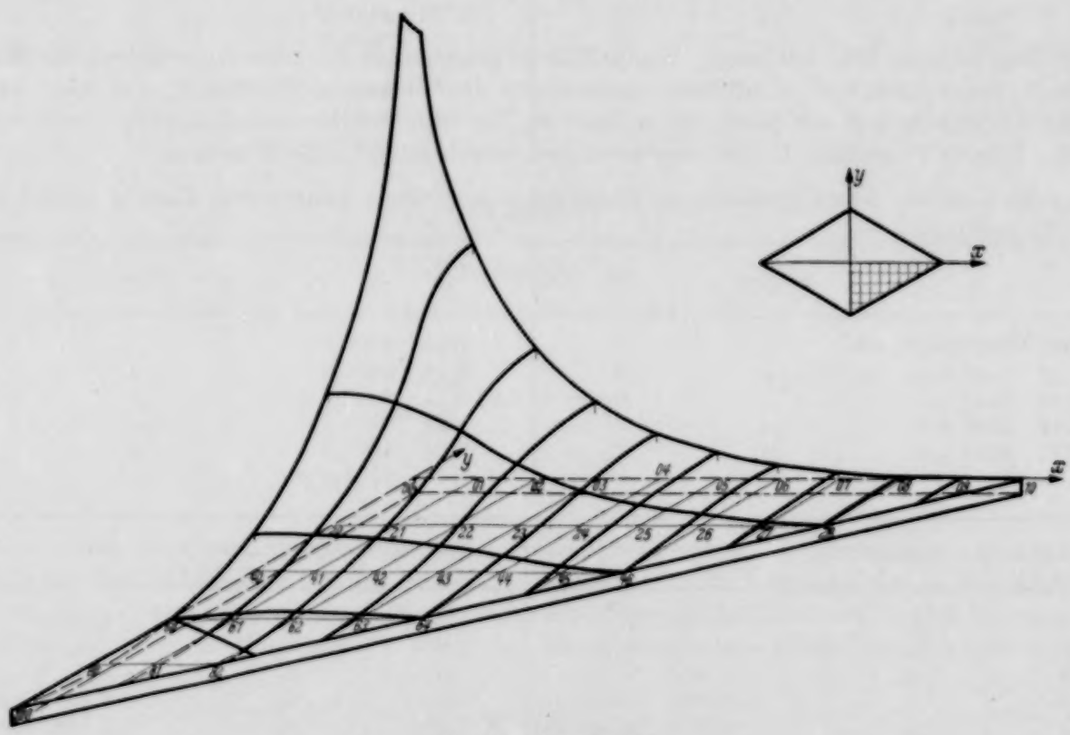


Abb. 15. m_y-Einflußfläche.

Graudenz[1] erhält hier die Werte

$$m_x = 0{,}0076 \frac{p\,a^4}{N}$$

bzw.

$$m_y = 0{,}0191 \frac{p\,a^4}{N}.$$

Die Anregung zum vorliegenden Aufsatz und wertvolle Hinweise bei der Ausarbeitung gab Herr Professor Dr. *F. Schultz-Grunow*, dem ich an dieser Stelle meinen ganz besonderen Dank aussprechen möchte.

Aus dem Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Aachen.

(Eingegangen am 11. November 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Richard Heinen*, Düsseldorf, Kurfürstenstr. 10.

[1] *H. Graudenz*, Beitrag zur Berechnung der Momenteneinflußfelder schiefwinkliger Platten, Diss. Hannover 1948.

Beitrag zur Berechnung von Translationsschalen*

Von **G. Mittelmann**

1. Allgemeines. Eine Schale läßt sich bekanntlich als zweidimensionales Kontinuum auffassen, und dementsprechend werden auch der Spannungs- und Verformungszustand zweidimensional dargestellt. Mit Hilfe der Tensorrechnung in der Schreibweise des Ricci-Kalküls, ohne den man heute bei der Untersuchung solcher Probleme nicht mehr auskommt, ist es möglich, die Gleichgewichtsbedingungen und die Spannungs- und Verzerrungsgleichungen in allgemeiner Form exakt aufzustellen. Die praktische Lösung wird aber auf diesem Wege äußerst schwierig und ist nicht durchführbar. Es müssen daher Näherungen eingeführt werden. Dies gilt auch für die Berechnung der Translationsschale.

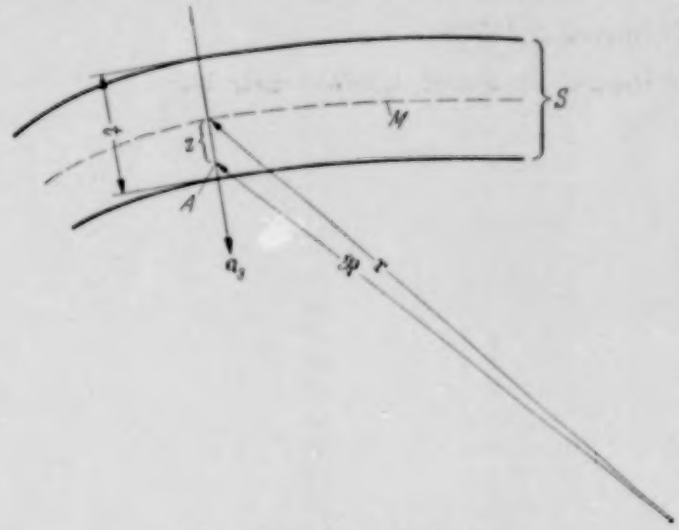


Abb. 1. Geometrische Beziehungen.

Es werde ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatennetz in die Mittelfläche M der Schale S gelegt. Mit den beiden krummlinigen Koordinaten Θ_1 und Θ_2, sowie der Koordinate Θ_3 in Richtung der Normalen zur Schalenmittelfläche M läßt sich der Ortsvektor $\mathfrak{R}$ eines beliebigen Schalenpunktes A wie folgt ausdrücken (Abb. 1):

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + z \cdot \mathfrak{a}_3 . \tag{1}$$

Hierbei sind $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{(\Theta_1, \Theta_2)}$ der Ortsvektor eines Punktes der Schalenmittelfläche M, ferner $z = t\,\Theta_3$ der Abstand eines Punktes A der Schale S von der Schalenmittelfläche M in Richtung der Normalen (Θ_3 läuft demnach von $-0{,}5$ bis $+0{,}5$). Weiter ist t die Dicke der Schale S in jedem Punkt, ebenfalls in Richtung der Normalen und $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_{3(\Theta_1, \Theta_2)}$ der Normalenvektor der Schalenmittelfläche M.

Die metrischen Fundamentalgrößen (kovariant) g_{ik} der Schale S lauten[1]:

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2\,t\,\Theta_3\,b_{\alpha\beta} + (t)^2\,(\Theta_3)^2\,c_{\alpha\beta}\,, \\ g_{\alpha 3} &= 0\,, \\ g_{33} &= (t)^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Darin bedeuten $a_{\alpha\beta}$ Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Mittelfläche M oder kovariante Maßzahlen des Maßtensors, $b_{\alpha\beta}$ Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Mittelfläche M oder kovariante Maßzahlen des Krümmungstensors, $c_{\alpha\beta}$ Koeffizienten der dritten Fundamentalform der Mittelfläche M.

Es interessiert zunächst die Geometrie der Schalenmittelfläche M (zweidimensional). Die oben angegebenen Koeffizienten der entsprechenden Fundamentalformen lassen sich mit Hilfe des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ für die Mittelfläche wie folgt berechnen: Mit Hilfe der kovarianten Basisvektoren der Mittelfläche

$$\mathfrak{a}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \Theta_\alpha} \tag{3}$$

erhält man

$$a_{\alpha\beta} = \mathfrak{a}_\alpha \cdot \mathfrak{a}_\beta\,. \tag{4}$$

Außerdem gilt

$$b_{\alpha\beta} = -\,\mathfrak{a}_\alpha \frac{\partial \mathfrak{a}_3}{\partial \Theta_\beta} = +\,\frac{\partial \mathfrak{a}_\alpha}{\partial \Theta_\beta}\,\mathfrak{a}_3\,, \tag{5}$$

---

* Dissertation der Technischen Hochschule Hannover. Referent: Professor Dr.-Ing. *Zerna*; Korreferent Professor Dr.-Ing. *Pflüger*.

[1] Es werde vereinbart, daß lateinische Indizes die Zahlen 1, 2, 3 und griechische Indizes die Zahlen 1, 2 verkörpern. Weiter soll über doppelt auftretende gleiche Indizes summiert werden. Potenzexponenten werden durch Klammern abgetrennt, um eine Verwechslung mit obenstehenden Indizes zu vermeiden.

wobei

$$\mathfrak{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \tag{6}$$

mit

$$a = a_{11}\, a_{22} - (a_{12})^2 > 0 \tag{7}$$

ist. Von den kontravarianten Maßzahlen werden benötigt

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \qquad a^{12} = -\frac{a_{12}}{a}, \qquad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}. \tag{8}$$

Jedem Punkt des Raumes lassen sich Vektoren bzw. Tensoren zuordnen, die dann Feldvektoren oder Feldtensoren heißen. Erstere lassen sich ausdrücken durch die Form

$$\mathfrak{V} = V^i \cdot \mathfrak{a}_i = V_i \cdot \mathfrak{a}^i . \tag{9}$$

Daraus ist ersichtlich, daß die V^i bzw. V_i als Komponenten in Richtung der kovarianten Basis $\mathfrak{a}_i$ bzw. der kontravarianten Basis $\mathfrak{a}^i$ gedeutet werden können.

Die Schnittgrößen (also Normalkräfte) von Schalen werden als die Komponenten in Richtung der kovarianten Basis des in Frage kommenden Schnittgrößen-Tensors, bezogen auf die entsprechende Längeneinheit der Schalenmittelfläche, definiert.

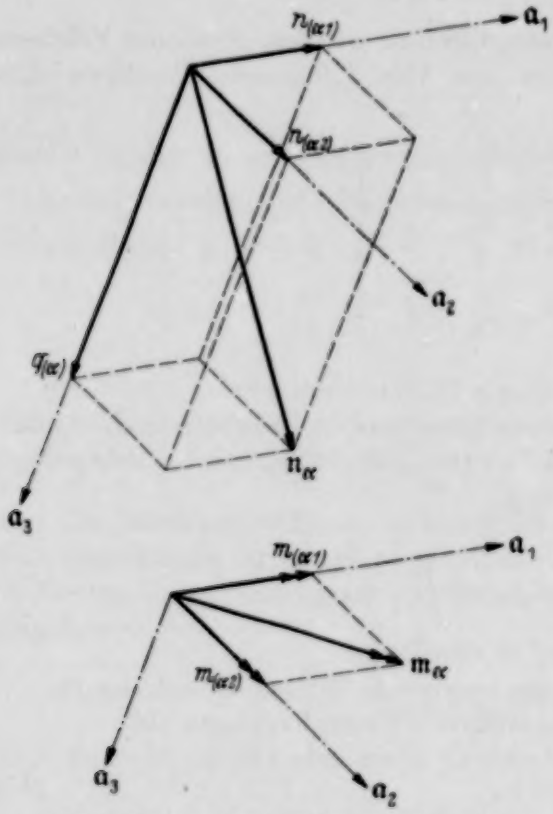


Abb. 2. Schnittgrößen in Richtung der kovarianten Basisvektoren.

Da die kovarianten Basisvektoren $\mathfrak{a}_i$ im allgemeinen keine Einheitsvektoren sind, muß Gleichung (9) durch den Betrag von $\mathfrak{a}_i$ dividiert werden. Für den auf die

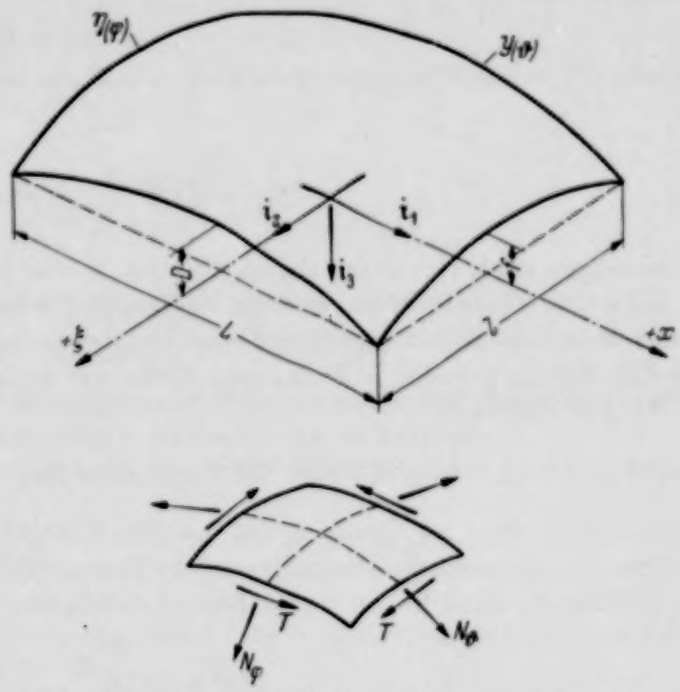


Abb. 3. Abmessungen der Translationsschale und Schnittkräfte am Schalenelement ($\vartheta = x/L$; $\varphi = \xi/l$).

Längeneinheit bezogenen Wert werden kleine Buchstaben eingeführt. Phänomenologisch läßt sich schreiben

$$\mathfrak{v} = v_{(i)} \cdot \frac{\mathfrak{a}_i}{\sqrt{a_{ii}}} . \tag{10}$$

Hierbei entsprechen die $v_{(i)}$ auf Grund der Definition den Schnittgrößen (Abb. 2).

Im folgenden soll über drei wesentliche Punkte berichtet werden: Ableitung und Lösung der Differentialgleichung für den Membranzustand, Verhältnisse in den Ecken und das Randstörungsproblem.

2. Membranzustand. Die Schnittkräfte des Membranzustandes werden am zeckmäßigsten über die von *Zerna*[1] angegebene Differentialgleichung ermittelt:

$$\mathfrak{a}_\alpha \frac{\partial N^{\beta\alpha}}{\partial \Theta_\beta} + \frac{\partial \mathfrak{a}_\alpha}{\partial \Theta_\varrho} N^{\alpha\varrho} + \mathfrak{p}\sqrt{a} = 0 , \tag{11}$$

[1] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 149.

oder ausgeschrieben:

$$+ \mathfrak{a}_1 \frac{\partial N^{11}}{\partial \Theta_1} + \mathfrak{a}_1 \frac{\partial N^{21}}{\partial \Theta_2} + \mathfrak{a}_2 \frac{\partial N^{12}}{\partial \Theta_1} + \mathfrak{a}_2 \frac{\partial N^{22}}{\partial \Theta_2} + \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial \Theta_1} N^{11} + \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial \Theta_2} N^{12} + \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial \Theta_1} N^{21} + \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial \Theta_2} N^{22} + \mathfrak{p} \cdot \sqrt{a} = 0 .$$

Aus den $N^{\alpha\beta}$ lassen sich die Schnittkräfte wie folgt ermitteln:

$$n_{(\alpha\beta)} = N^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a\, a^{\alpha\alpha}}} , \tag{12}$$

oder ausgeschrieben:

$$n_{(11)} = N^{11} \sqrt{\frac{a_{11}}{a\, a^{11}}} = N^{11} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} = N_\vartheta , \qquad n_{(12)} = N^{12} \sqrt{\frac{a_{22}}{a\, a^{11}}} = N^{12} = T ,$$

$$n_{(21)} = N^{21} \sqrt{\frac{a_{11}}{a\, a^{22}}} = N^{21} = T , \qquad n_{(22)} = N^{22} \sqrt{\frac{a_{22}}{a\, a^{22}}} = N^{22} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} = N_\varphi .$$

Analog gilt für den Belastungsvektor

$$\mathfrak{p} = p_1 \mathfrak{i}_1 + p_2 \mathfrak{i}_2 + p_3 \mathfrak{i}_3 , \qquad \text{wobei} \qquad \bar{p}_i = \sqrt{a}\, p_i . \tag{13}$$

Außerdem ist

$$N^{11} \equiv \bar{N}_\vartheta , \qquad N^{12} \equiv T , \qquad N^{22} \equiv \bar{N}_\varphi . \tag{14}$$

Nach Einsetzen der $\mathfrak{a}_\alpha$-Werte in Gleichung (11) und Multiplikation mit den einzelnen Vektoren ergeben sich unter Berücksichtigung der Bezeichnungsweise von Abb. 3 folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{N}_\vartheta' + T^{\cdot} + \frac{\bar{p}_1}{L} &= 0 , \\ T' + N_\varphi^{\cdot} + \frac{\bar{p}_2}{l} &= 0 , \\ y''\, \bar{N}_\vartheta + \eta^{\cdot\cdot}\, \bar{N}_\varphi - \frac{y'}{L} \bar{p}_1 - \frac{\eta^{\cdot}}{l} \bar{p}_2 + \bar{p}_3 &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ableitungen nach ϑ werden durch Striche, solche nach φ durch Punkte angezeigt.

Es werde vorausgesetzt, daß die beiden Querschnittskurven quadratische Parabeln sind. Außerdem werde dem Belastungsgesetz eine konstante Schalendicke t (in $\mathfrak{a}_3$-Richtung) zu Grunde gelegt; die sich daraus ergebende Belastung wirke nur in $\mathfrak{i}_3$-Richtung.

Es gilt demnach

$$t = \text{konst.}, \qquad p_1 = p_2 = 0 , \qquad p_3 = \frac{\sqrt{a}}{L \cdot l}\, p . \tag{16}$$

Hierbei ist p die Last bezogen auf die Flächeneinheit der Schalenfläche.

Die Gleichgewichtsbedingungen (15) lassen sich auf eine einzige Differentialgleichung für $\bar{N}_\vartheta$ zurückführen; diese lautet unter Berücksichtigung der eingeführten Vereinbarungen (16)

$$\Phi'' + \frac{D}{f} \Phi^{\cdot\cdot} + 2\, \frac{L}{l}\, p = 0 , \tag{17}$$

wobei

$$\bar{N}_\vartheta = 8 f \Phi \tag{18}$$

ist. Diese Differentialgleichung läßt sich geschlossen lösen (vgl. z. B. *Pucher*[1]); bei Einführung der Randbedingungen

$$N_\vartheta|_{\vartheta = \pm 0{,}5} = 0$$

und

$$N_\varphi|_{\varphi = \pm 0{,}5} = 0$$

ergibt sich

$$\frac{\Phi}{p} = -\frac{L}{2\,l}\vartheta^2 - \frac{L}{2\,l}\frac{f}{D}\varphi^2 + C_1^* \frac{\mathfrak{Cof}\, \pi \sqrt{\frac{D}{f}}\, \vartheta}{\mathfrak{Cof}\, \pi \sqrt{\frac{D}{f}}\, 0{,}5} \cos \pi \varphi + C_5^* \frac{\mathfrak{Cof}\, \pi \sqrt{\frac{f}{D}}\, \varphi}{\mathfrak{Cof}\, \pi \sqrt{\frac{f}{D}}\, 0{,}5} \cos \pi \vartheta$$

$$+ \sum C_{\substack{1\\n}}^* e^{n\pi \sqrt{\frac{D}{f}}\, (|\vartheta| - 0{,}5)} \cos n\pi\varphi + \sum C_{\substack{5\\n}}^* e^{n\pi \sqrt{\frac{f}{D}}\, (|\varphi| - 0{,}5)} \cos n\pi\vartheta . \tag{19}$$

[1] *A. Pucher*, Beton u. Eisen 33 (1934) S. 298; Bauing. 18 (1937) S. 118.

Für die Konstanten gilt

$$\left.\begin{aligned} C_1^* &= \left[\frac{L}{8l}\left(1+\frac{f}{D}\right)\right]\left(\frac{4}{\pi}-1\right)+\frac{L}{8l},\\ C_3^* &= \left[\frac{L}{8l}\left(1-\frac{f}{D}\right)-\frac{1}{4}\,\frac{lD}{Lf}-\frac{Ll}{64fD}\right]\left(\frac{4}{\pi}-1\right)-\left(\frac{1}{8}\,\frac{fL}{lD}+\frac{Ll}{64fD}\right),\\ C_{\frac{1}{n}1}^* &= +\frac{4}{n\pi}\,\frac{L}{8l}\left(1+\frac{f}{D}\right),\\ C_{\frac{3}{n}1}^* &= +\frac{4}{n\pi}\left[\frac{L}{8l}\left(1-\frac{f}{D}\right)-\frac{1}{4}\,\frac{lD}{Lf}-\frac{Ll}{64fD}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Für die Vorzeichen der mit n behafteten Konstanten gilt

das vorhandene Vorzeichen	für	$n = 5, 9, \ldots$
das entgegengesetzte Vorzeichen	für	$n = 3, 7, \ldots$

Daraus ergeben sich die Schnittgrößen zu

$$N_\vartheta = +8f\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\,\Phi\,, \tag{21}$$

$$N_\varphi = -\left(8D\Phi+\frac{a}{8fLl}p\right)\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,, \tag{22}$$

$$T = -\eta^{\cdot\cdot}\int \Phi'\,d\varphi\,. \tag{23}$$

Damit ist der Membranspannungszustand beschrieben.

Zur überschläglichen Berechnung interessieren die Schnittkräfte entlang der Ränder. Hierfür gilt

am Rand $\vartheta = \pm 0{,}5$:

$$N_\varphi = -\frac{a}{8fLl}p\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,, \qquad N_\varphi|_{\varphi=0} = -\frac{l^2}{8fL}\sqrt{L^2+16D^2}\,p\,, \qquad N_\vartheta \equiv 0\,. \tag{24}$$

am Rand $\varphi = \pm 0{,}5$:

$$N_\vartheta = -\frac{a}{8DLl}p\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\,, \qquad N_\vartheta|_{\vartheta=0} = -\frac{L^2}{8Dl}\sqrt{l^2+16f^2}\,p\,, \qquad N_\varphi \equiv 0\,. \tag{25}$$

Für die Schubkräfte lassen sich auf Grund der Lösungen für Φ keine einfachen Formeln ableiten. Zur Berechnung ist es erforderlich, sämtliche Integrationskonstanten zu kennen.

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse des Zahlenbeispiels läßt sich folgende grobe Näherung angeben:

$$T = T_{\substack{\vartheta=\pm 0{,}5\\ \varphi=\pm 0{,}5}}\frac{1}{\operatorname{tg} 82^\circ}\operatorname{tg}(\Theta\pi)\,, \qquad \text{wobei} \qquad \Theta \leqq 0{,}375\,. \tag{26}$$

Der Eckwert ergibt sich nach *Csonka*[1] mit einem Korrekturfaktor (Erfahrungswert) von 2,0 zu

$$T_{\substack{\vartheta=\pm 0{,}5\\ \varphi=\pm 0{,}5}} \approx 2\cdot 0{,}693\cdot 2{,}0\,\frac{0{,}5\,L\;0{,}5\,l}{f+D}\,p$$

oder

$$T \approx 0{,}7\,\frac{Ll}{f+D}\,p\,. \tag{27}$$

Diese sehr grobe Näherung muß an Hand anderer Zahlenbeispiele noch überprüft werden.

3. Formänderungszustand. Der Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$ eines Punktes der Schalenmittelfläche sei

$$\mathfrak{v} = u\,\mathfrak{i}_1 + v\,\mathfrak{i}_2 + w_0\,\mathfrak{a}_3\,, \tag{28}$$

worin u, v, w_0 seine Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$ und der Flächennormalen sind. Der Vektor $\mathfrak{a}_3$ ist der Normalenvektor der Mittelfläche [siehe (6)]. Für die kovarianten Maßzahlen des Verzerrungstensors gilt nach *Zerna*

$$\alpha_{11} = \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{v}'\,, \qquad \alpha_{22} = \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{v}^{\cdot}\,, \qquad 2\,\alpha_{12} = 2\,\alpha_{21} = \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{v}^{\cdot} + \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{v}'\,. \tag{29}$$

Zur Lösung der im folgenden behandelten Fragen (Eckproblem, Randstörungen) ist es erforderlich, eine Aussage über w_0 entlang der Ränder zu machen.

[1] *P. Csonka*, Acta Technica Hung. 10 (1955) S. 59; Acta Technica Hung. 11 (1955) S. 231.

Nach *Zerna*[1] gilt

$$w_0|_{\varphi=\pm 0{,}5} = -\frac{\alpha_{11} - L\,u'}{b_{11}}, \qquad w_0|_{\vartheta=\pm 0{,}5} = -\frac{\alpha_{22} - l\,v'}{b_{22}}. \tag{30}$$

Für u' und v' werde vereinbart, daß das Randglied eine Verschiebung der Schale am Rand in u- bzw. v-Richtung verhindert; es gilt demnach

$$u|_{\varphi=\pm 0{,}5} = u'|_{\varphi=\pm 0{,}5} = 0, \qquad v|_{\vartheta=\pm 0{,}5} = v'|_{\vartheta=\pm 0{,}5} = 0. \tag{31}$$

Daraus ergibt sich

$$w_0|_{\varphi=\pm 0{,}5} = -\frac{\alpha_{11}}{b_{11}}, \qquad w_0|_{\vartheta=\pm 0{,}5} = -\frac{\alpha_{22}}{b_{22}}. \tag{32}$$

Das Elastizitätsgesetz bleibt in seiner allgemeinen Form erhalten[2]:

$$E\,t\,\alpha_{\varkappa\beta} = H_{\varkappa\beta\varrho\lambda}\,N^{\varrho\lambda}, \tag{33}$$

wobei

$$H_{\varkappa\beta\varrho\lambda} = \frac{1}{2}\left[a_{\varkappa\lambda}\,a_{\beta\varrho} + a_{\varkappa\varrho}\,a_{\beta\lambda} - \mu\,(\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\beta\varrho} + \varepsilon_{\varkappa\varrho}\,\varepsilon_{\beta\lambda})\right]$$

mit

$$\varepsilon_{12} = -\,\varepsilon_{21} = \sqrt{a}, \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0,$$

oder umgeschrieben

$$\left.\begin{aligned} E\,t\sqrt{a}\,\alpha_{11} &= (a_{11})^2\,\bar{N}_\vartheta + 2\,a_{11}\,a_{12}\,T + [(a_{12})^2 - \mu\,a]\,\bar{N}_\varphi, \\ E\,t\sqrt{a}\,\alpha_{12} &= a_{11}\,a_{12}\,\bar{N}_\vartheta + [(a_{12})^2 + a_{11}\,a_{22} + \mu\,a]\,T + a_{12}\,a_{22}\,\bar{N}_\varphi, \\ E\,t\sqrt{a}\,\alpha_{22} &= [(a_{12})^2 - \mu\,a]\,\bar{N}_\vartheta + 2\,a_{12}\,a_{22}\,T + (a_{22})^2\,\bar{N}_\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Damit ist der Formänderungszustand, wie er für die Behandlung der in dieser Arbeit behandelten Probleme benötigt wird, beschrieben.

4. Eckproblem. An den vier Ecken der Schale zeigt sich eine eigentümliche Singularität, auf die *Flügge*[3] bereits hingewiesen hat. Die vorgeschriebenen Randbedingungen können nicht erfüllt werden. Am Rand $\vartheta = \pm 0{,}5$ soll $N_\vartheta = 0$ sein. Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt, daß $N_\varphi \neq 0$ ist. Betrachten wir die Ecke $\vartheta = \pm 0{,}5$, $\varphi = \pm 0{,}5$, die zu beiden Rändern gehört, so ist ersichtlich, daß hier ein Widerspruch besteht.

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt in den Ecken bestimmte Größen für die Normalkräfte, also nicht Null. Das liegt daran, daß der Teil der Lösung, der aus *Fourier*-Reihen besteht, eben in den Ecken zu Null wird und somit die partikuläre Lösung nicht mehr beeinflussen kann.

Für die Schubkräfte ergeben sich in den Ecken unendlich große Werte, da die *Fourier*-Entwicklung, wie aus Gleichung (23) ersichtlich, wegen der sin-Glieder nicht konvergiert.

Dies ist auch richtig, da die Schale den in den Eckpunkten auftretenden Konflikt zwischen der Differentialgleichung und den eingeführten Randbedingungen so löst, daß sie hier die Last mit unendlich großen Schubkräften an unendlich kleinem Kontingenzwinkel trägt; die beiden Druckgewölbe sind infolge $N_\vartheta = N_\varphi = 0$ nicht in der Lage, die örtliche Last zu tragen, während sie es unmittelbar neben dem Rande noch tun.

Bei der Untersuchung der quadratischen, doppeltsymmetrischen Translationsschale ergibt die Rechnung unterschiedliche Werte für die Normalkräfte in den Ecken, was im Gegensatz zur physikalischen Tatsache steht.

Für $p = 1$ gilt

$$\Phi = -\,0{,}25, \qquad N_\vartheta = +\,8\,D\,\Phi = -\,2\,D, \qquad N_\varphi = -\left(8\,D\,\Phi + \frac{a}{8\,D\,L^2}\right);$$

mit

$$a = L^4 + 32\,L^2\,D^2$$

ergibt sich

$$N_\varphi = -\left(-\,2\,D + \frac{L^2}{8\,D} + 4\,D\right) = -\,2\,D - \frac{L^2}{8\,D},$$

also

$$N_\vartheta \neq N_\varphi.$$

---

[1] *W. Zerna*, Österr. Ing.-Arch. 7 (1953) S. 181.

[2] *Green-Zerna*, Theoretical Elasticity, Oxford 1954.

[3] *W. Flügge*, Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik, Federhofer-Girkmann-Festschrift, Wien 1950, S. 17.

Es wird daher zur Klärung der Verhältnisse in den Ecken vorgeschlagen, den Bereich, in dem die *Fourier*-Lösung keine richtigen Ergebnisse bringen kann, getrennt zu behandeln und den Formänderungszustand mit heranzuziehen.

Für die Durchbiegung w_0 entlang der Ränder gilt unter Berücksichtigung von (32) und (34) und $\mu = 0$

am Rand $\vartheta = +0{,}5$:

$$E\, w_0|_{\vartheta = +0{,}5} = -\frac{1}{8\, L\, l\, f\, t}\left[(a_{12})^2\, \bar{N}_\vartheta + 2\, a_{12}\, a_{22}\, T + (a_{22})^2\, \bar{N}_\varphi\right], \qquad (35)$$

am Rand $\varphi = +0{,}5$:

$$E\, w_0|_{\varphi = +0{,}5} = -\frac{1}{8\, L\, l\, D\, t}\left[(a_{11})^2\, \bar{N}_\vartheta + 2\, a_{11}\, a_{12}\, T + (a_{12})^2\, \bar{N}_\varphi\right].$$

Auch hieraus ist ersichtlich, daß die Schubkraft einen endlichen Wert aufweisen muß, um den physikalischen Verhältnissen Rechnung zu tragen, da für $T = \infty$ auch $w_0 = \infty$, was nicht möglich ist.

Zur Lösung des Problems wird w_0 entlang des Randes (z. B. $\vartheta = 0{,}5$) graphisch aufgetragen und unter Voraussetzung gleicher Gesetzmäßigkeit sinnvoll bis zur Ecke $\varphi = +0{,}5$ verlängert; die sich aus der graphischen Auftragung ergebende Durchbiegung in den Ecken werde mit $\bar{w}$ bezeichnet.

Als weitere Bedingung, die für die Berechnung der Schnittgrößen benötigt wird, gilt die Tatsache, daß w in der Ecke gleich groß sein muß, unabhängig davon, ob diese als zum Rand $\vartheta = +0{,}5$ oder $\varphi = +0{,}5$ gehörig angesehen wird.

Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen (also T ein endlicher Wert, Ermittlung von w aus der graphischen Auftragung an beiden Rändern, und $w_0|_\vartheta = w_0|_\varphi$ für die gemeinsame Ecke) lassen sich die Schnittkräfte in den Ecken eindeutig bestimmen. Es gilt demnach

$$w_0|_{\vartheta = \pm 0{,}5} = w_1(\bar{N}_\vartheta, T, \bar{N}_\varphi) = \bar{w}, \qquad w_0|_{\varphi = \pm 0{,}5} = w_2(\bar{N}_\vartheta, T, \bar{N}_\varphi) = \bar{w} \qquad (36)$$

aus graphischer Auftragung.

Außerdem ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung (15.3)

$$\bar{N}_\varphi = f(\bar{N}_\vartheta). \qquad (37)$$

Man erhält somit zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten T und $\bar{N}_\vartheta$, womit das Problem gelöst ist.

Für die Schnittkräfte ergibt sich

$$\bar{N}_\vartheta\,(\bar{n}_1\, \bar{t}_2 - \bar{n}_2\, \bar{t}_1) = \bar{w}_1\, \bar{t}_2 - \bar{w}_2\, \bar{t}_1, \qquad (38)$$

$$T\,(n_2\, \bar{t}_1 - \bar{n}_1\, \bar{t}_2) = \bar{w}_1\, \bar{n}_2 - \bar{w}_2\, \bar{n}_1, \qquad (39)$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= (a_{22})^2\, \overset{a}{8\, L\, l\, f} p - 8\, E\, \bar{w}\, L\, l\, t\, f, & \bar{w}_2 &= (a_{12})^2\, \overset{a}{8\, L\, l\, f} p - 8\, E\, \bar{w}\, L\, l\, t\, D, \\ \bar{n}_1 &= (a_{12})^2 - \frac{D}{f}(a_{22})^2, & \bar{n}_2 &= (a_{11})^2 - \frac{D}{f}(a_{12})^2, \\ \bar{t}_1 &= 2\, a_{12}\, a_{22}, & \bar{t}_2 &= 2\, a_{11}\, a_{12}. \end{aligned} \qquad (40)$$

5. Randstörungen. Längs der Ränder einer Schale lassen sich mit Hilfe der Membrantheorie im allgemeinen nicht alle gewünschten Randbedingungen erfüllen, so daß die längs ihrer Ränder beanspruchte, im übrigen aber unbelastete Schale untersucht werden muß.

Es werde ein Rand $\vartheta = \vartheta_0$ betrachtet. Die Randstörungen, die von diesem Rand ausgehen, sind dadurch gekennzeichnet, daß die Größenordnung aller Funktionen, die diese Störung beschreiben, durch Differentiation nach ϑ zunimmt, durch Differentiation nach φ jedoch unverändert bleibt. Es können daher näherungsweise alle Funktionen außer denen mit den höchsten Ableitungen nach ϑ vernachlässigt werden. Hinsichtlich eines Randes $\varphi = \varphi_0$ gilt Entsprechendes.

Hierzu ist festzustellen, daß sich alle interessierenden Schnittgrößen (Abb. 4) in Abhängigkeit von der Verschiebung w darstellen lassen[1].

---

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 292.

Für den Rand $\vartheta = \vartheta_0$ gilt

$$n_{(11)} = + B \overset{(1)}{w}{}^{,,,,} \frac{a_{22}}{a\, b_{22}} \sqrt{\frac{a_{11}\, a_{22}}{a}}, \tag{41}$$

$$n_{(12)} = - B \overset{(1)}{w}{}^{,,,,} \frac{(a_{22})^2}{a\, b_{22}} \frac{1}{\sqrt{a}}, \tag{42}$$

$$n_{(22)} = - E\, t \overset{(1)}{w} \frac{b_{22}}{a_{22}} \sqrt{\frac{a}{a_{11}\, a_{22}}}. \tag{43}$$

$$m_{(11)} = 0, \tag{44}$$

$$m_{(21)} = + B \overset{(1)}{w}{}^{,,} \mu \frac{a_{22}}{a}, \tag{45}$$

$$m_{(12)} = - B \overset{(1)}{w}{}^{,,} \frac{a_{22}}{a}, \tag{46}$$

$$m_{(22)} = + B \overset{(1)}{w}{}^{,,} (1 - \mu) \frac{a_{12}}{a} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}. \tag{47}$$

$$q_{(1)} = - B \overset{(1)}{w}{}^{,,,} \frac{a_{22} \sqrt{a_{22}}}{a \sqrt{a}}, \tag{48}$$

$$q_{(2)} = + B \overset{(1)}{w}{}^{,,,} \frac{a_{22}\, a_{21}}{a \sqrt{a\, a_{11}}}. \tag{49}$$

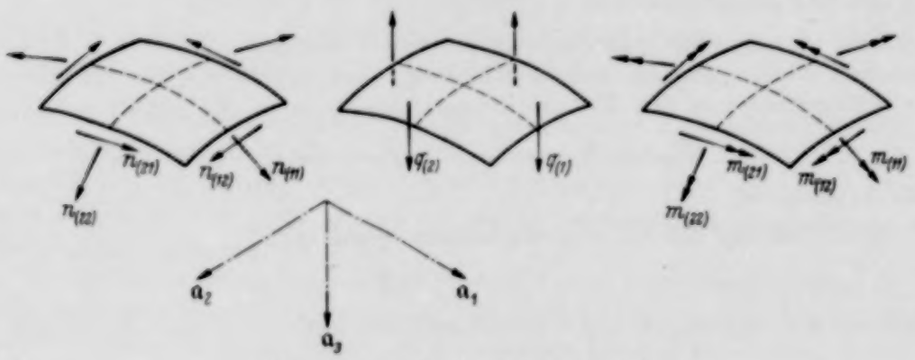


Abb. 4. Schnittgrößen der Translationsschale.

Für den Rand $\varphi = \varphi_0$ gilt

$$n_{(11)} = - E\, t \overset{(2)}{w} \frac{b_{11}}{a_{11}} \sqrt{\frac{a}{a_{11}\, a_{22}}}, \tag{50}$$

$$n_{(12)} = - B \overset{(2)}{w}{}^{,,,} \frac{(a_{11})^2}{a\, b_{11}} \frac{1}{\sqrt{a}}, \tag{51}$$

$$n_{(22)} = + B \overset{(2)}{w}{}^{,,,,} \frac{a_{11}}{a\, b_{11}} \sqrt{\frac{a_{11}\, a_{22}}{a}}. \tag{52}$$

$$m_{(11)} = - B \overset{(2)}{w}{}^{,,} (1 - \mu) \frac{a_{12}}{a} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}, \tag{53}$$

$$m_{(21)} = + B \overset{(2)}{w}{}^{,,} \frac{a_{11}}{a}, \tag{54}$$

$$m_{(12)} = - B \overset{(2)}{w}{}^{,,} \mu \frac{a_{11}}{a}, \tag{55}$$

$$m_{(22)} = 0. \tag{56}$$

$$q_{(1)} = + B \overset{(2)}{w}{}^{,,,} \frac{a_{11}\, a_{12}}{a \sqrt{a\, a_{22}}}, \tag{57}$$

$$q_{(2)} = - B \overset{(2)}{w}{}^{,,,} \frac{a_{11} \sqrt{a_{11}}}{a \sqrt{a}}. \tag{58}$$

Nach *Zerna*[1] und *Green-Zerna*[2] läßt sich das Problem der Randstörungen auf eine Differentialgleichung für die Normalverschiebung w zurückführen. Für den Rand $\vartheta = \vartheta_0$ gilt

$$w'''' + 4\,k_\vartheta^4\,w = 0\,. \tag{59}$$

Darin ist

$$k_\vartheta^4 = \frac{3\,(1-\mu^2)}{t^2\,(a_{22})^4}\,(a\,b_{22})^2\,. \tag{60}$$

Die Lösung der Differentialgleichung läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn für die Schalendicke t folgende Näherung eingeführt wird:

$$t = \frac{\sqrt{a}}{(a_{22})^2}\,L\,l\,\frac{\eta''}{y''}\,t_0\,. \tag{61}$$

Hierdurch erhält man

$$k_\vartheta^4 = \frac{3\,(1-\mu^2)}{t_0^2}\,(y'')^2 = \text{konst}\,. \tag{62}$$

Unter Berücksichtigung dieser Näherung gilt unter der Voraussetzung des schnellen Abklingens

$$\overset{(1)}{w} = +\,e^{-k_\vartheta\,\bar{\vartheta}}\,(C_1^*\cos k_\vartheta\,\bar{\vartheta} + C_2^*\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta})\,. \tag{63}$$

Hier sind C_1^* und C_2^* beliebige Funktionen von φ.

Für den Rand $\varphi = \varphi_0$ gilt analog

$$t = \frac{\sqrt{a}}{(a_{11})^2}\,L\,l\,\frac{y''}{\eta''}\,t_0\,. \tag{64}$$

$$b_{11} = \frac{L\,l}{\sqrt{a}}\,y''\,,$$

$$k_\varphi^4 = \frac{3\,(1-\mu^2)}{t_0^2}\,(\eta'')^2 = \text{konst.}\,, \tag{65}$$

$$\overset{(2)}{w} = e^{-k_\varphi\,\bar{\varphi}}\,(C_3^*\cos k_\varphi\,\bar{\varphi} + C_4^*\sin k_\varphi\,\bar{\varphi})\,. \tag{66}$$

Hierbei zählen die mit einem Querstrich versehenen Koordinaten $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\varphi}$ vom Rand her zum Nullpunkt hin.

Zur Lösung des Randstörungsproblems am Rand $\vartheta = \vartheta_0$ wird die Stelle $\varphi = 0$ betrachtet und angenommen, daß sich die Verformungen cos- bzw. sin-förmig verteilen; dies kann auf Grund des Verlaufes von w in erster Näherung angenommen werden (Abb. 5).

Mit

$$C_1^* = C_1 f_{(\varphi)}\,, \qquad C_2^* = C_2 f_{(\varphi)} \tag{67}$$

und

$$\overset{(1)}{w} = w_\vartheta \cos \pi\,\varphi \tag{68}$$

gilt

$$w_\vartheta = +\,C_1\,e^{-k_\vartheta\,\bar{\vartheta}}\cos k_\vartheta\,\bar{\vartheta} + C_2\,e^{-k_\vartheta\,\bar{\vartheta}}\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta}\,. \tag{69}$$

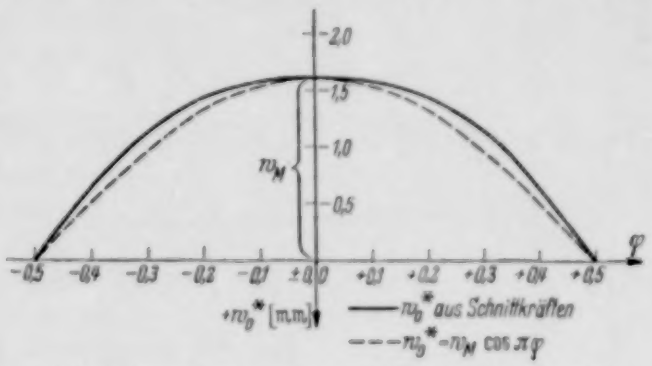


Abb. 5. Verlauf von w entlang des Randes $\vartheta = \vartheta_0 = \pm\,0{,}5$.

Der Aufbau der Formeln für die verschiedenen Ableitungen von w_ϑ ist so, daß man allgemein für die Schnittgrößen Y_K und die Verformung $\overset{(1)}{w}$ schreiben kann

$$Y_K = f_{(\varphi)}\,\varkappa_\vartheta\,\{+\,C_1\,e^{-k_\vartheta\,\bar{\vartheta}}\,[+\,k_1\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta} + k_2\cos k_\vartheta\,\bar{\vartheta}] + C_2\,e^{-k_\vartheta\,\bar{\vartheta}}\,[-\,k_1\cos k_\vartheta\,\bar{\vartheta} + k_2\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta}]\}\,. \tag{70}$$

Die Werte $f_{(\varphi)}$, sowie $\varkappa_\vartheta$ und $k_{1,2}$ können für die einzelnen Schnittgrößen angegeben und in einer Übersicht zusammengestellt werden (siehe Tabelle 1).

Zur Ermittlung der Konstanten C_i müssen die Klaffungen (d. i. die Differenz aus den Verformungen der Schale am Rande und denjenigen des entsprechenden Randträgers) zu Null werden.

Die sich aus den Einheitsbelastungsfällen $C_i = 1$ ergebenden Schnittkräfte der Schale werden als Belastung des Randträgers aufgefaßt und die sich hieraus ergebenden Verformungen ermittelt.

---

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 292.
[2] Siehe Fußnote 2 von Seite 292.

Tabelle 1. *Übersicht Rand* $\vartheta = \vartheta_0$

Y_K	$f_{(u)}$	$f_{(\varphi)}$	$\varkappa_\vartheta$	k_1	k_2
w	w	$+\cos\pi\varphi$	$+1{,}0$	0	$+1{,}0$
$\frac{\partial w}{\partial\vartheta}$	w'	$+\cos\pi\varphi$	$+k_\vartheta$	$+1{,}0$	$+1{,}0$
$n_{(11)}$	w''''	$-\pi^2\cdot\cos\pi\varphi$	$+\frac{E\,t^2\sqrt{3(1-\mu^2)}}{6(1-\mu^2)}$	$+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$	0
$n_{(12)}$	w'''	$-\pi\cdot\sin\pi\varphi$	$-\frac{E\,t^2\left[\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\right]^3}{6(1-\mu^2)\sqrt{t}}\sqrt{L\,l\,\eta''}$	$+\frac{1}{a_{22}}\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$	$-\frac{1}{a_{22}}\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$
$\frac{\partial n_{(12)}}{\partial\varphi}$	w''''	$-\pi^2\cdot\cos\pi\varphi$			
$n_{(22)}$	w	$+\cos\pi\varphi$	$-E\,t\,L\,l\,\eta''$	0	$+\frac{1}{a_{22}}\sqrt{\frac{1}{a_{11}\,a_{22}}}$
$m_{(11)}$	0				
$m_{(21)}$	w''	$+\cos\pi\varphi$	$+\frac{E\,t^2\sqrt{3(1-\mu^2)}}{6(1-\mu^2)}L\,l\,\eta''$	$+\frac{\mu}{\sqrt{a}\,a_{22}}$	0
$m_{(12)}$	w''	$+\cos\pi\varphi$	$-\frac{E\,t^2\sqrt{3(1-\mu^2)}}{6(1-\mu^2)}L\,l\,\eta''$	$+\frac{1}{\sqrt{a}\,a_{22}}$	0
$m_{(22)}$	w''	$+\cos\pi\varphi$	$+\frac{E\,t^2\sqrt{3(1-\mu^2)}}{6(1-\mu^2)}L\,l\,\eta''$	$+(1-\mu)\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{a_{12}}{a_{22}}\frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}}}$	0
$q_{(1)}$	w'''	$+\cos\pi\varphi$	$-\frac{E\,t^2\left[\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\right]^3}{6(1-\mu^2)\sqrt{t}}L\,l\,\eta''\sqrt{L\,l\,\eta''}$	$+\frac{1}{a_{22}}\frac{1}{\sqrt{a\,a_{22}}}\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$	$-\frac{1}{a_{22}}\frac{1}{\sqrt{a\,a_{22}}}\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$
$q_{(2)}$	w'''	$+\cos\pi\varphi$	$+\frac{E\,t^2\left[\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\right]^3}{6(1-\mu^2)\sqrt{t}}L\,l\,\eta''\sqrt{L\,l\,\eta''}$	$+\frac{a_{21}}{(a_{22})^2}\frac{1}{\sqrt{a\,a_{11}}}\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$	$-\frac{a_{21}}{(a_{22})^2}\frac{1}{\sqrt{a\,a_{11}}}\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$

Als rechte Seiten des sich aus diesen Überlegungen ergebenden Gleichungssystems müssen die Verformungen der Schale unter Eigengewicht (Membranzustand) und die Verformungen des Randträgers infolge der Membrankräfte der Schale und seines Eigengewichtes berücksichtigt werden.

Um schnell zu einem anschaulichen Ergebnis zu gelangen, erscheint es angebracht, zwei Sonderfälle zu untersuchen. Hierfür werden folgende Annahmen gemacht:

a) Der Randträger sei ideal starr, d. h.

$$w \equiv 0\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{\vartheta}} \equiv 0\,.$$

b) Für den Membranzustand sei $\partial w/\partial\bar{\vartheta}$ der Schale an der Stelle $\vartheta = \pm 0{,}5$, $\varphi = 0$ vernachlässigbar klein.

Für den Sonderfall der Einspannung ergibt sich folgende Matrix:

		$C_1 = 1$	$C_2 = 1$	Membranzustand
w	Schale	$+1{,}0$	0	$-w_M$*
	Träger	0	0	0
	Δ	$+1{,}0$	0	$-w_M$
$\frac{\partial w}{\partial\bar{\vartheta}}$	Schale	$+k_\vartheta$	$-k_\vartheta$	0
	Träger	0	0	0
	Δ	$+k_\vartheta$	$-k_\vartheta$	0

* Über die Bedeutung von w_M vgl. Gleichung (80) und Bild 5.

Es ist sofort zu sehen, daß

$$C_1 = -w_M \quad \text{und} \quad C_2 = +C_1 \tag{71}$$

sind. Damit vereinfacht sich Gleichung (70) zu

$$Y^E = f(\varphi)\,\varkappa_\vartheta\, C_1\, e^{-k_\vartheta\bar{\vartheta}}\,[+(k_1+k_2)\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta} + (k_2-k_1)\cdot\cos k_\vartheta\,\bar{\vartheta}]\,. \tag{72}$$

Für das Quermoment gilt

$$M_\vartheta^E = -w_M\,\varkappa_\vartheta\,k_1\,e^{-k_\vartheta\bar{\vartheta}}\,(\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta} - \cos k_\vartheta\,\bar{\vartheta})\,. \tag{73}$$

An der Stelle $\vartheta = \pm 0{,}5$, $\varphi = 0$ ergibt sich

$$M_\vartheta^0 = -w_M\,\frac{E\,t^2\sqrt{3}\,L\,l\,\eta''}{6}\,\frac{1}{\sqrt{a}\,a_{22}} = -w_M\left[2{,}31\,\frac{E\,t^2\,L\,f}{l^2\sqrt{L^2+16\,D^2}}\right]. \tag{74}$$

Damit kann abgeschätzt werden, bei welcher Größenordnung von w_M das Quermoment so groß wird, daß es bei der Bemessung berücksichtigt werden muß.

Der andere Größtwert des Quermomentes liegt bei $\bar{\vartheta}^E = \pi/2\,k_\vartheta$ und beträgt

$${}_{max}M_\vartheta^E = -w_M\,\varkappa_\vartheta\,k_1\,e^{-\pi/2}\sin\frac{\pi}{2} \approx -\frac{1}{5}\,M_\vartheta^0\,. \tag{75}$$

Für den Sonderfall Gelenk ergibt sich nach Auflösung der Matrix

$$Y^G = f_{(\varphi)}\,\varkappa_\vartheta\,C_1\,e^{-k_\vartheta\bar{\vartheta}}\,(k_1\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta} + k_2\cos k_\vartheta\,\bar{\vartheta})\,, \tag{76}$$

$$M_\vartheta^G = -w_M\,\varkappa_\vartheta\,k_1\,e^{-k_\vartheta\bar{\vartheta}}\sin k_\vartheta\,\bar{\vartheta}\,. \tag{77}$$

Das größte Quermoment beträgt hierbei etwa $-\frac{1}{3}\,M_\vartheta^0$ und liegt bei $\bar{\vartheta}^G = \frac{\pi}{4\,k_\vartheta}$.

Es darf noch erwähnt werden, daß die Dehnungen ε am Schalenanschnittspunkt bei Schale und Randträger übereinstimmen müssen. Bei Untersuchung der angeführten Sonderfälle ergibt sich folgendes:

	C_1	C_2	Membranzustand
w (Schale)	$+1{,}0$	0	$-w_M$
$n_{(22)} = N_\varphi = \varepsilon\cdot t$ (Schale)	$\varkappa_\vartheta(+k_2)$	$-k_1 = 0$	$-N_{\varphi M}$

Es zeigt sich, daß C_1 beide Gleichungen erfüllt [vgl. (32) und (34)].

Aus der ersten Gleichung folgt

$$C_1 = -w_M = +\frac{\alpha_{22}}{b_{22}} = \frac{(a_{22})^2}{E\,t\sqrt{a}}\,\bar{N}_{\varphi_M}\frac{\sqrt{a}}{L\,l\,\eta''} = \frac{1}{E\,t\,L\,l\,\eta''}(a_{22})^2\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\,N_{\varphi_M}$$

$$= +\frac{a_{22}\sqrt{a_{11}\,a_{22}}}{E\,t\,L\,l\,\eta''}\,N_{\varphi_M} = -\frac{1}{\varkappa_\vartheta\,(+k_2)}\,N_{\varphi_M}.$$

Damit ist die zweite Gleichung erfüllt.

Die endgültigen Schnittkräfte sind dann

$$n_{(\alpha\,\beta)} = n^M_{(\alpha\,\beta)} + n^R_{(\alpha\,\beta)}, \tag{78}$$

z. B.

$$n_{(11)} = N_\vartheta + n^R_{(11)}.$$

6. Zahlenbeispiel. Die Berechnung der Schnittkräfte des Membranzustandes bereitet keine Schwierigkeit; als Beispiel wird der Verlauf von N_φ am Rand $\vartheta = \vartheta_0$ angegeben (Abb. 6). Abmessungen: $L = 27{,}50$ m; $l = 21{,}26$ m; $D = 3{,}34$ m; $f = 1{,}95$ m; $t = 6$ cm; $p = 0{,}35$ t/m².

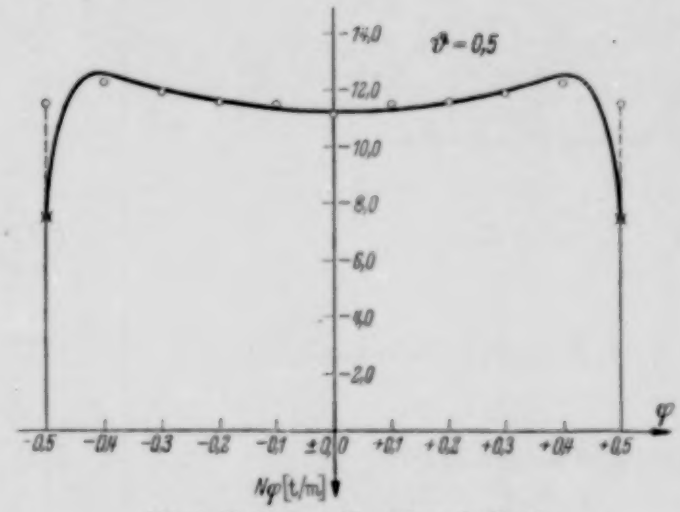


Abb. 6. Verlauf von N_φ entlang des Randes $\vartheta = \vartheta_0 = \pm 0{,}5$.

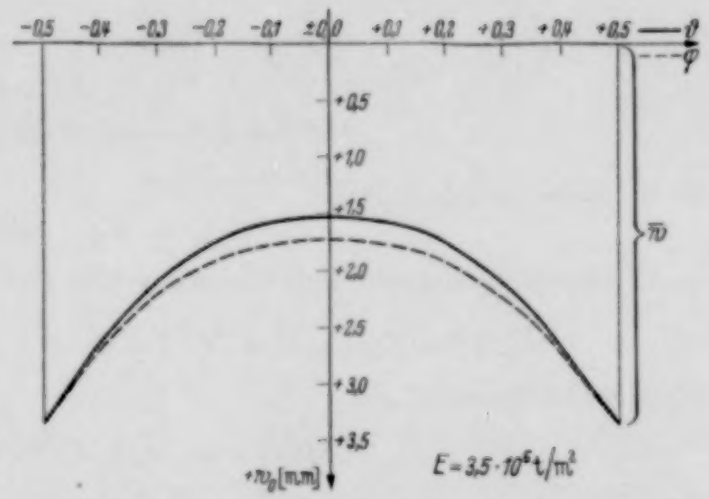


Abb. 7. Verlauf von w entlang beider Ränder (sinnvolle Verlängerung bis in die Ecken).

Der Verlauf der nach Gleichung (32) unter Benutzung von Gleichung (34) berechneten Verschiebung w_0 ist aus der graphischen Darstellung Abb. 7 ersichtlich. Hieraus ergab sich der Wert für $\bar{w}$ in den Ecken, welcher der Berechnung der Schnittgrößen in den Ecken zugrunde gelegt wurde.

Es ist

$$\bar{w} = w_0\Big|_{\substack{\vartheta = \pm 0{,}5 \\ \varphi = \pm 0{,}5}}. \tag{79}$$

Für die Berechnung der Randstörungen gilt (vgl. auch Abb. 5)

$$w_M = w_0^*\Big|_{\substack{\vartheta = \pm 0{,}5 \\ \varphi = 0}}, \tag{80}$$

wobei

$$w_0^* = w_0 - \bar{w}$$

ist.

Den Berechnungen für die Randstörungen wurde die Übersicht Tabelle 1 zugrunde gelegt und die beiden angeführten Sonderfälle behandelt; der besonders interessierende Verlauf des Quermomentes ist in Abb. 8 dargestellt. In der Tabelle 2 sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

Aus Abb. 9 ist ersichtlich, daß die eingeführte Veränderlichkeit die Schalendicke t in vertretbaren Grenzen gegenüber der konstanten Dicke der Membrantheorie variieren läßt. Außerdem zeigen die Ergebnisse, daß durch die Lösung diejenige Randbedingung nicht beeinflußt wird, welche durch die Membrantheorie erfüllt worden ist, also $n_{(11)} = N_\vartheta = 0$ entlang des Randes. Über $n_{(22)} = N_\varphi$ macht die Membrantheorie für diesen Rand keine einschränkende Aussage, so daß die Randstörung diese Größe beeinflussen kann, was auch tatsächlich der Fall ist.

Wie man leicht zeigen kann, beträgt das Größenordnungsverhältnis $\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) \Big/ w$ für das Zahlenbeispiel, für Einspannung etwa $\frac{100}{5{,}7} = 17{,}5$ und für Gelenk etwa $\frac{158}{5{,}7} = 27{,}7$, während das Verhältnis $(\partial w/\partial \varphi)/w$ in beiden Fällen $\pi/1 = 3{,}14$ ausmacht.

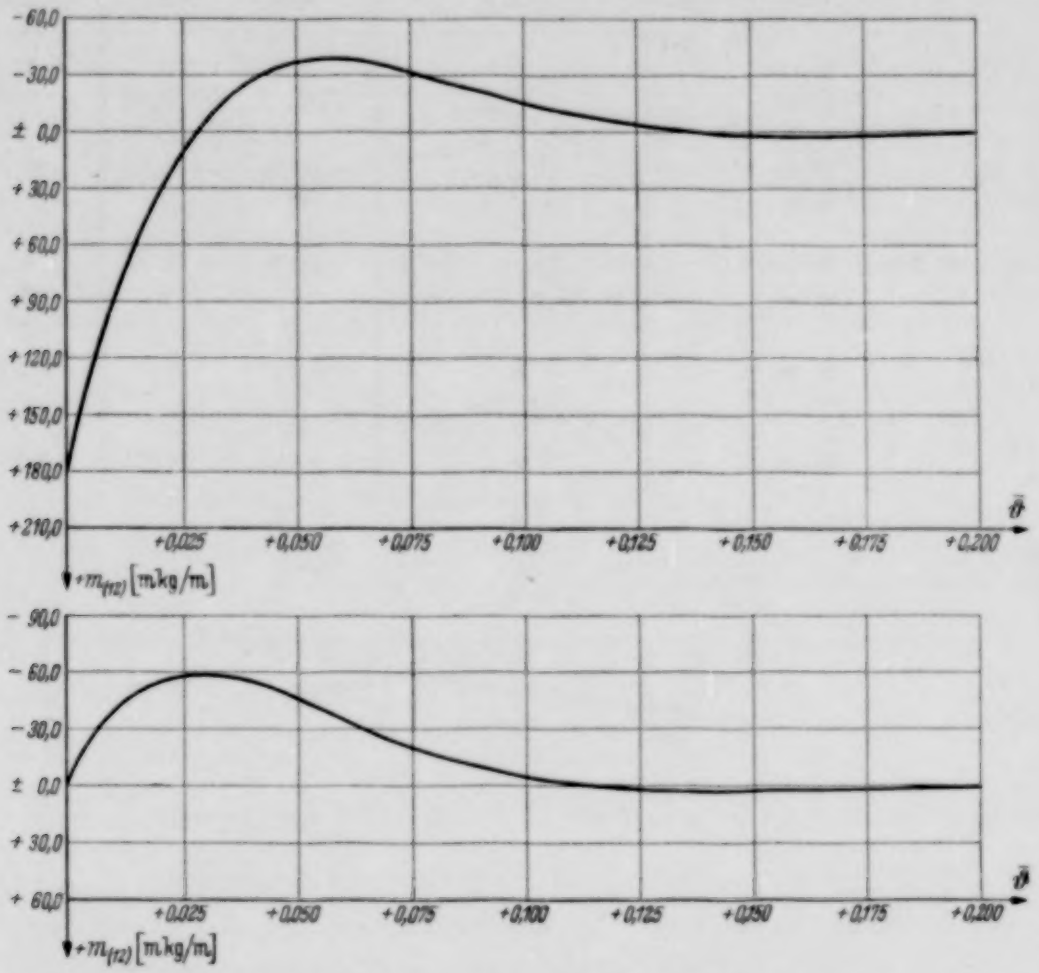


Abb. 8. Verlauf des Quermomentes bei Einspannung in den Randträger (oben) und gelenkigem Anschluß (unten).

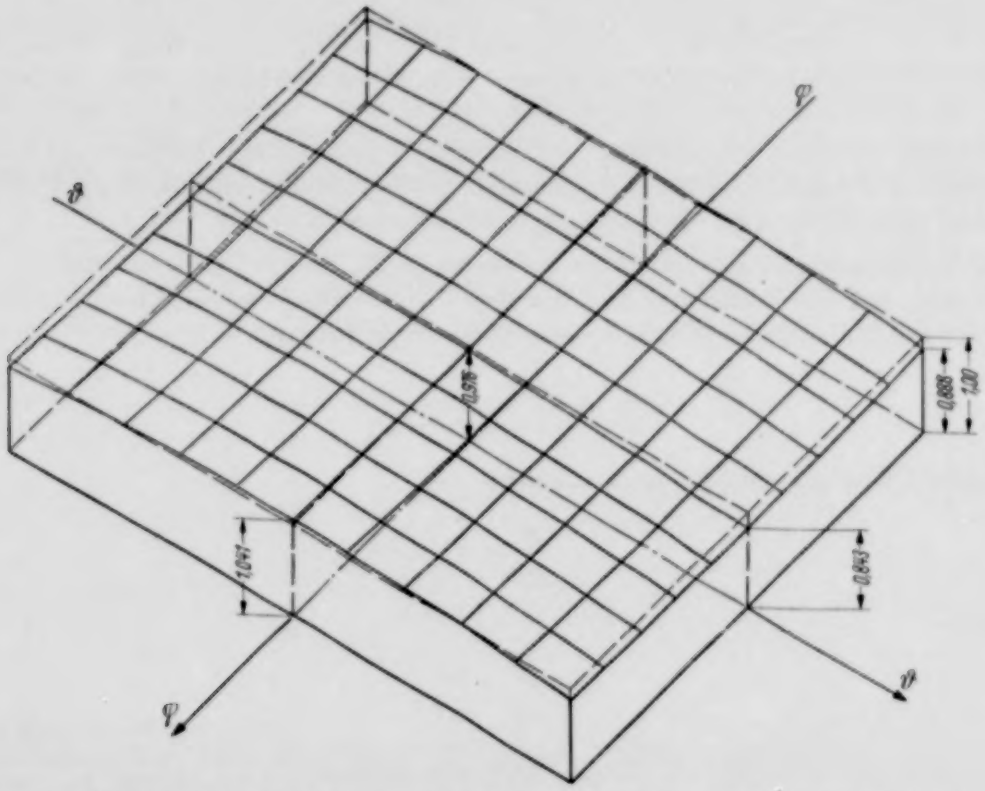


Abb. 9. Veränderliche Schalendicke t, aufgetragen über der Grundrißfläche der Schale.

Tabelle 2

Schnittgröße Dimension	Punkt $\vartheta = +0{,}5$	Membranzustand		Randstörungen Einsp.	Randstörungen Gelenk	Summe Einsp.	Summe Gelenk
$n_{11} = N_\vartheta$ t/m	Mitte $\varphi = 0$	0		— 0,13	0	— 0,13	0
	Ecke $\varphi = 0{,}5$	— 6,30		0	0	— 6,30	— 6,30
$n_{(12)} = T$ t/m	Mitte	0		0	0	0	0
	Ecke	— 27,3		+ 1,65	+ 0,83	— 25,65	— 26,47
$n_{(22)} = N_\varphi$ t/m	Mitte	— 11,27		— 10,56	— 10,56	— 21,83	— 21,83
	Ecke	— 7,4		0	0	— 7,4	— 7,4
w_0 mm Ew_0^* bzw. Ew t/m	Mitte	+ 1,73	— 5670	+ 5670	+ 5670	0	0
	Ecke	+ 3,35	0	0	0	0	0
$m_{(12)} = M_\vartheta$ mt/m	Mitte	0		+ 0,183	0	+ 0,183	0
$q_{(1)} = Q_\vartheta$ t/m	Mitte	0		+ 0,35	+ 0,17	+ 0,35	+ 0,17

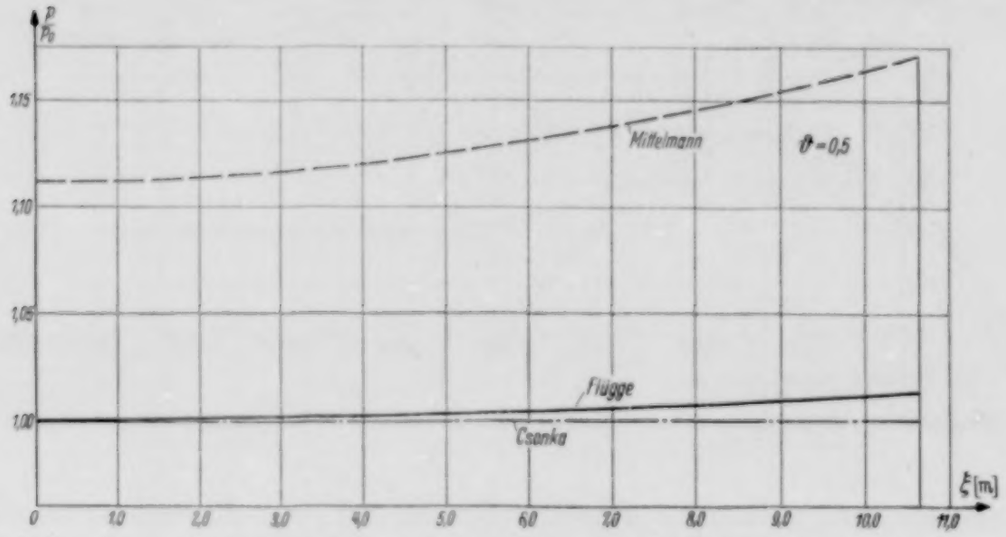


Abb. 10. Verschiedene Belastungsfunktionen entlang des Randes $\vartheta = \vartheta_* = \pm 0{,}5$.

Dieses die Voraussetzung befriedigend erfüllende Ergebnis ist abhängig von dem Wert k_ϑ, der im betrachtenden Beispiel 27,7 beträgt, also sehr groß ist und demnach auch die Randstörungen sehr schnell abklingen läßt, was ebenfalls angenommen worden war.

Der Vergleich mit anderen Berechnungsverfahren (z. B. *Flügge*[1] und *Csonka*[2] in bezug auf die geometrische Form, auf die Belastung und die sich daraus ergebenden Schnittkräfte ist sehr aufschlußreich. Für die Belastungsverteilung gilt z. B. nach *Flügge*

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi}}$$

(ϑ und φ sind hier Öffnungswinkel), nach *Csonka*

$$\frac{p}{p_0} = 1$$

nach *Mittelmann*

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\sqrt{a}}{L\,l}.$$

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, S. 99, Berlin 1934.
[2] Siehe Fußnote 2 von Seite 291.

Die graphische Auftragung dieser Funktionen entlang des Randes $\vartheta = 0{,}5$ zeigt Abb. 10. Der Verlauf der Schnittkraft $N\varphi$ ist für die Schnitte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 0{,}5$ in Abb. 11 dargestellt.

Eine Untersuchung des Formänderungszustandes und des Einflusses von Randstörungen ist nicht möglich, da deren Beschreibung hier erstmals praktisch durchgeführt wurde.

Eine ausführliche Gegenüberstellung der bisher bekannten Berechnungsverfahren (u. a. *Pucher*[1], *Tungl*[2], *Salvadori*[3]) dürfte weitere aufschlußreiche Ergebnisse zeitigen.

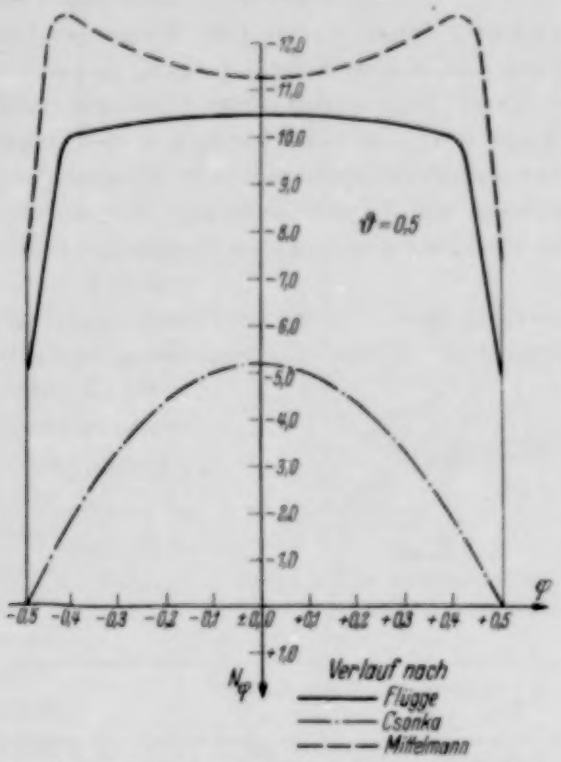


Abb. 11. Verlauf von N_φ entlang des Randes $\vartheta = \vartheta_0 = \pm 0{,}5$. — Vergleich zwischen verschiedenen Berechnungsverfahren.

7. Schlußbetrachtung. Die bisher bekannten Berechnungsmethoden für Translationsschalen befriedigen nicht in allen Teilen; einmal wegen ihres erheblichen Rechenaufwandes, zum anderen wegen ihrer Unvollständigkeit in bezug auf den Formänderungszustand und das Randstörungsproblem. Mit der vorliegenden Arbeit ist versucht worden, einen neuen Weg zur Berechnung dieser Schalenform aufzuzeigen, dessen Gleichungen und Ergebnisse sowohl alle Gleichgewichts- als auch die Formänderungsbedingungen erfüllen. Dies konnte durch die Einführung verschiedener Näherungen erreicht werden, deren berechtigte Verwendung nachgewiesen wurde. Ein Vergleich mit den anderen Verfahren ergibt wissenswerte Aufschlüsse und zeigt die Zweckmäßigkeit der angewandten Methode. Außerdem ist es nunmehr möglich, die Größe der durch das Randstörungsproblem auftretenden Schnittgrößen zu berechnen und ihren Auswirkungsbereich zu ermitteln, so daß auch Ausführungen mit schwierigen Randgliedausbildungen damit der Berechnung zugänglich werden.

(Eingegangen am 14. November 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Goswin Mittelmann*, Frankfurt (Main), Ziegenhainerstraße 89.

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 290.
[2] *E. Tungl*, Österr. Ing. Arch. 10 (1956) S. 308; Österr. Bauz. 11 (1956) S. 274.
[3] *M. G. Salvadori*, ACI Proceedings 52 (1956) S. 1099.

Biegeschwingungen einer unrunden, rotierenden Welle in horizontaler Lage

Von W. Kellenberger

1. Einleitung. Der Querschnitt einer unrunden Welle besitzt zwei senkrecht aufeinander stehende Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt, denen zwei verschiedene Biegesteifigkeiten zugeordnet sind. Die durch eine sogenannte Unwucht erzeugten Schwingungen werden dadurch abhängig von der Lage der Unwucht bezüglich des Querschnittes. Ist die Welle horizontal gelagert, so werden zusätzlich doppelfrequente Biegeschwingungen angeregt, die bei gut ausgewuchteten Wellen durchaus die Größenordnung der durch Unwucht erzeugten Schwingungen erreichen können. Sie sind im Gegensatz zu diesen durch mechanisches Auswuchten nicht beeinflußbar.

Das Problem gewinnt praktisch immer mehr an Bedeutung durch die enorme Leistungssteigerung an Turbogeneratoren, deren zwei verschiedene Biegesteifigkeiten bedingt sind durch die über den Umfang der „Welle" ungleichmäßig verteilten Nuten für die Stromleiter. Die mechanische Festigkeit solcher schnellaufender Rotoren setzen einer nennenswerten Vergrößerung ihres Durchmessers enge Grenzen, wodurch sie sehr schlank werden. Man „fährt" heute schon zwischen der zweiten und dritten normalen kritischen Drehzahl bei Nennbetrieb.

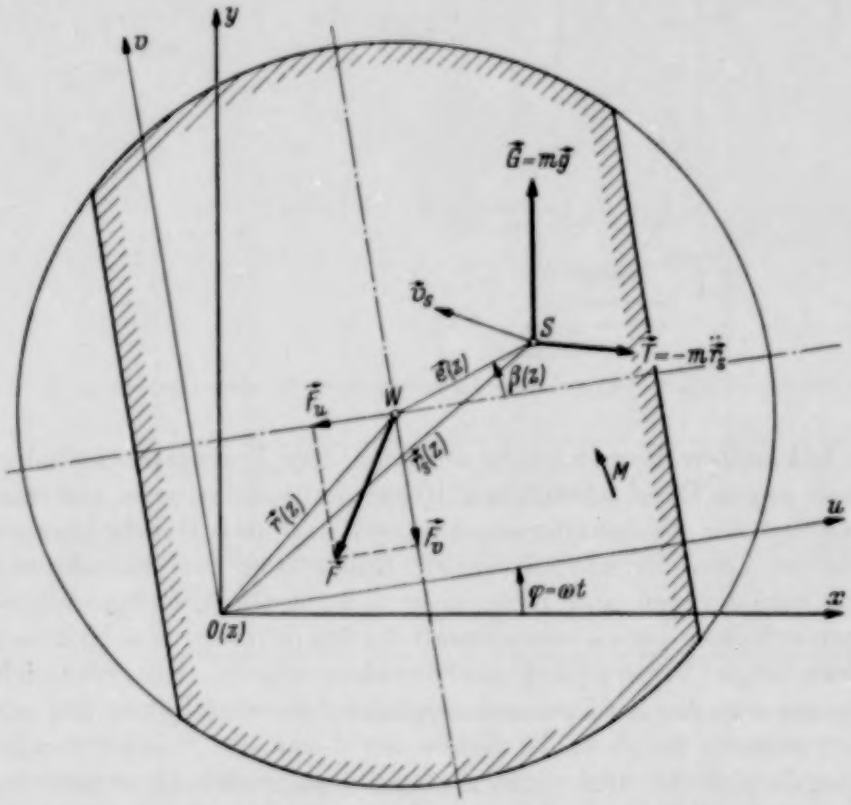


Abb. 1. Orientierung der Welle und Kräfte im ruhenden System. $\vec{r}(z)$ = Auslenkung des Wellenmittelpunktes W; $\vec{e}(z)$ = Exzentrizität des Schwerpunktes S.

Über das entsprechende Problem mit nur einem Freiheitsgrad, der masselosen Welle verschiedener Biegesteifigkeit mit in der Mitte aufgesetzter Scheibe, wurde verschiedentlich[1] und mehr oder weniger ausführlich geschrieben. Im Folgenden soll das Problem im Sinne der Kontinuumsmechanik an der gleichmäßig mit Masse belegten Welle verschiedener, über die Länge jedoch konstanter Biegesteifigkeit behandelt werden. Damit ergibt sich dann auch der Einfluß der ungleichmäßigen Biegesteifigkeit auf die Oberschwingungen.

2. Differentialgleichungen. In Abb. 1 ist ein Querschnitt durch die Welle dargestellt. Dabei ist x, y, z ein ortsfestes, u, v, z das mit der Welle rotierende System, wobei u und v die Richtungen der Hauptschwerachsen des Querschnittes angeben. Damit kann sich der Querschnitt nur translatorisch bezüglich u, v bewegen. Die y-Achse habe die Richtung des Eigengewichtes der Welle und die z-Achse die horizontale Lage der unverformten Wellenachse. Der Punkt 0 ist der Durchstoßpunkt der unverbogenen Achse, der Punkt W ist der geometrische Mittelpunkt der Welle und S der Schwerpunkt, somit $e = \overline{WS}$ die „Exzentrizität".

Bezeichnet man mit $E J_u = B_u$ bzw. $E J_v = B_v$ die zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten (Federzahlen) der Welle in der (u, z)- bzw. (v, z)-Ebene, und bleibt man im Rahmen der Balken-

[1] *A. Stodola*, Dampf- und Gasturbinen, S. 931, 5. Aufl., Berlin 1922. *D. M. Smith*, Proc. Roy. Society A 142 (1933) s. 92. *H. D. Taylor*, Journ. Appl. Mech. (1940) A-71. *W. R. Foote, H. Poritsky* u. *J. J. Slade, Jr.*, Journ. Appl. Mech. (1943) A 77. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik (Bd. II, S. 64, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953. *O. Kraemer*, Neuere Feststellungen über Biegeschwingungen an Kurbelwellen, München 1956.

biegetheorie von *Bernoulli*, so schreibt sich der elastische Widerstand je Längeneinheit F_u und F_v in Richtung u und v

$$\left.\begin{aligned} F_u &= -B_u\, u^{IV}, \\ F_v &= -B_v\, v^{IV} \end{aligned}\right\} \qquad B_v > B_u\,. \tag{1}$$

Römische Exponenten bezeichnen im folgenden Ableitungen nach der Stabachse z Punkte nach der Zeit t. Die allgemeinen Transformationsformeln heißen

$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos\omega t - v\sin\omega t\,, \\ y &= u\sin\omega t + v\cos\omega t\,, \\ u &= x\cos\omega t + y\sin\omega t\,, \\ v &= -x\sin\omega t + y\cos\omega t\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es ist zweckmäßig, die Bewegungsdifferentialgleichungen in einem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω drehenden Koordinatensystem zu formulieren. Dabei sind neben den absoluten Kräften die fiktiven Zusatzkräfte der Relativbewegung, die Fliehkraft $\vec{Z}$ und die Corioliskraft $\vec{C}$ zu berücksichtigen. Die Aufspaltung in Komponenten der an der Welle angreifenden Kräfte (Abb. 2) führt dann zu folgender Tabelle[1]:

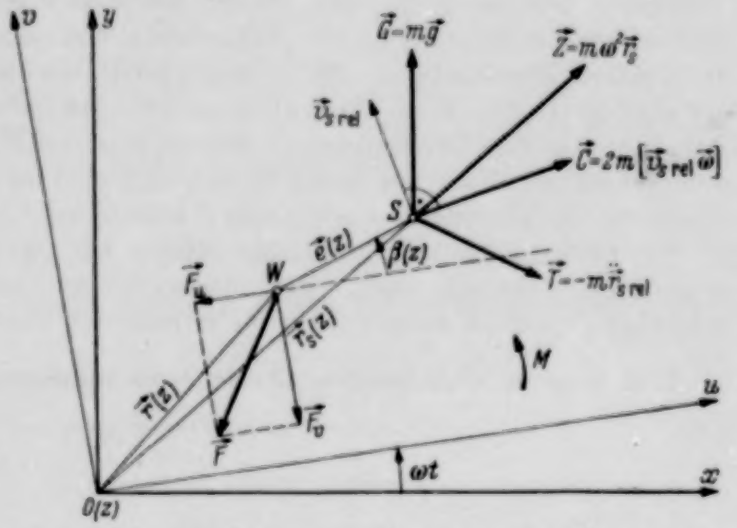


Abb. 2. Kräfte und Scheinkräfte im rotierenden System. $-\vec{r}(z)$ = Auslenkung des Wellenmittelpunktes W; $\vec{e}(z)$ = Exzentrizität des Schwerpunktes S.

Kräfte je Längeneinheit	Komponenten in Richtung u	Komponenten in Richtung v	Beziehungen vgl. Abb. 2
Eigengewicht $\vec{G} = m\,\vec{g}$	$g\,m\sin\omega t$	$g\,m\cos\omega t$	
Führungskraft $\vec{F}(F_u, F_v)$ (Federkraft)	$-B_u\,u^{IV}$	$-B_v\,v^{IV}$	$B_u < B_v$
Trägheitskraft $\vec{T} = -m\,\ddot{\vec{r}}_s$	$-m\,\ddot{u}_s$	$-m\,\ddot{v}_s$	$u_s = u + e\cos\beta$
Fliehkraft $\vec{Z} = m\,\omega^2\,\vec{r}_s$	$m\,\omega^2\,u_s$	$m\,\omega^2\,v_s$	$v_s = v + e\sin\beta$
Corioliskraft $\vec{C} = 2\,m\,[v_{s\,rel}\,\vec{\omega}]$	$2\,m\,\omega\,\dot{v}_s$	$-2\,m\,\omega\,\dot{u}_s$	

Dabei ist m die Masse der Welle je Längeneinheit, g die Erdbeschleunigung und $\beta(z, t)$ der Lagewinkel der Exzentrizität $\overrightarrow{WS} = \vec{e}$ gegen die u-Achse. Das dynamische Gleichgewicht der Kräfte $\vec{G} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{Z} + \vec{C} = 0$ liefert in Komponenten des rotierenden Systems ausgedrückt die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u} - 2\,\omega\,\dot{v} + \frac{B_u}{m}\,u^{IV} - \omega^2\,u &= e\,\omega^2\cos\beta + g\sin\omega t\,, \\ \ddot{v} + 2\,\omega\,\dot{u} + \frac{B_v}{m}\,v^{IV} - \omega^2\,v &= e\,\omega^2\sin\beta + g\cos\omega t\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die zweite dynamische Gleichgewichtsbedingung fordert das Verschwinden der Drehmomente aller beteiligten Kräfte. Bedeutet $\Theta = m\,k^2$ das Trägheitsmoment je Längeneinheit, k also den Trägheitsradius und M das äußere Drehmoment der Welle, so gilt

$$\Theta\,\ddot{\beta} = M - F_u\,e\sin\beta + F_v\,e\cos\beta$$

oder mit Rücksicht auf obige Tabelle

$$\ddot{\beta} = \frac{M}{m\,k^2} + \frac{e^2}{k^2}\,\frac{1}{e\,m}\,(B_u\,u^{IV}\sin\beta - B_v\,v^{IV}\cos\beta)\,. \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) und (4) stellen ein System von drei linearen, gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen sechster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in u, v und β dar. Das entsprechende System in ortsfesten Koordinaten würde zeitlich harmonische Koeffizienten auf-

[1] Schubkräfte, rotatorische Trägheit, Kreiselwirkung und Dämpfungskräfte sind vernachlässigt.

weisen, ähnlich der *Mathieu*schen Gleichung im Gebiete der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Vorteil einer Transformation liegt in der Vereinfachung der Differentialgleichungen durch die Vermeidung harmonischer Koeffizienten.

Wir beschränken uns noch auf den stationären Betrieb $M = 0$. Bleiben wir außerdem im Bereich der Großmaschinen, so ist das Verhältnis Exzentrizität zu Trägheitsradius von der Größenordnung $< 10^{-4}$, also der Ausdruck $e^2/k^2 < 10^{-8}$ eine sehr kleine Zahl. Man darf deshalb den zweiten Summanden auf der rechten Seite der Gleichung (4) in erster Näherung vernachlässigen[1]. Gleichung (4) führt damit auf $\ddot{\beta} = 0$ oder $\beta = a\,t + b$, wobei a und b zeitlich konstante Größen bedeuten. Im stationären Betrieb besteht somit in erster Näherung auch ein stationärer Drehzustand. Setzt man noch voraus, daß ω die mittlere, konstante Winkelgeschwindigkeit der Welle bedeutet, so verschwindet offenbar a, und β ($= b$) wird eine zeitlich konstante Größe. Die Bewegung der rotierenden Welle wird, und diese ist das wichtigst Ergebnis der Näherung, allein durch die Differentialgleichung (3) beschrieben, in der jetzt β eine zeitlich kontante, im allgemeinen noch von z abhängige Größe darstellt.

Die beiden Gleichungen (3) mit denen wir unsere Untersuchung allein weiterführen wollen, sind immer noch gekoppelt. Zusammen mit den noch zu formulierenden Lager- und Anfangsbedingungen wird ein Randwertproblem achter Ordnung in rotierenden Koordinaten definiert.

3. Homogene Gleichungen (Freie Schwingungen). Der vereinfachte Produktansatz

$$u = Z(z)\; T_u(t)\,, \qquad v = Z(z)\; T_v(t) \tag{5}$$

führt auf folgende Separation der Variabeln:

$$\frac{m}{B_u}\left(\frac{\ddot{T}_u}{T_u} - 2\,\omega\,\frac{\dot{T}_v}{T_u} - \omega^2\right) + \frac{Z^{\mathrm{IV}}}{Z} = 0\,, \qquad \frac{m}{B_v}\left(\frac{\ddot{T}_v}{T_v} + 2\,\omega\,\frac{\dot{T}_u}{T_v} - \omega^2\right) + \frac{Z^{\mathrm{IV}}}{Z} = 0\,,$$

was jederzeit und an jedem Ort nur möglich ist unter den drei Bedingungen

$$\frac{Z^{\mathrm{IV}}}{Z} = k^4\,, \tag{6a}$$

$$\frac{\ddot{T}_u}{T_u} - 2\,\omega\,\frac{\dot{T}_v}{T_u} - \omega^2 = -\,k^4\,\frac{B_u}{m}\,, \tag{6b}$$

$$\frac{\ddot{T}_v}{T_v} + 2\,\omega\,\frac{\dot{T}_u}{T_v} - \omega^2 = -\,k^4\,\frac{B_v}{m}\,, \tag{6c}$$

wo k eine noch zu bestimmende Konstante sein soll.

Die Gleichung (6a) führt auf die bekannte Lösung

$$Z = A\,\sin k\,z + B\,\cos k\,z + C\,\sinh k\,z + D\,\cosh k\,z \tag{7}$$

mit den vier Integrationskonstanten A, B, C, D, welche aus den Rand- oder Lagerbedingungen zu bestimmen sind.

Im Falle der an den Enden starr, aber frei-drehbar gelagerten Welle lauten die Lagerbedingungen[2]

$$Z(0) = 0\,, \quad Z(l) = 0\,, \qquad Z''(0) = 0\,, \quad Z''(l) = 0\,. \tag{8}$$

Sie ergeben zusammen mit (7) vier homogene Gleichungen mit der Verträglichkeitsbedingung

$$k = \frac{n\,\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

und der einzigen, von Null verschiedenen Konstanten A, wodurch

$$Z = A_n \sin\frac{n\,\pi}{l}\,z \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{10}$$

---

[1] Greift man der Untersuchung etwas vor und benützt die Gleichungen (19), (20) und (37), so läßt sich (4) in der etwas übersichtlicheren Form

$$\ddot{\beta} = \frac{e^2}{k^2}\,\frac{\bar{\omega}^2}{e}\left[\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right)u\,\sin\beta - \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right)v\,\cos\beta\right] \quad \text{mit} \quad \bar{\varepsilon} = 2\,\frac{B_v - B_u}{B_v + B_u}$$

darstellen, in der u, v und e Längen von gleicher Größenordnung, e^2/k^2 dagegen als vernachlässigbar klein angesehen werden können, so daß $\beta = \bar{\omega}^2\,0\cdot = 0$ wird.

[2] Andere Lagerbedingungen lassen sich ganz analog behandeln, bringen aber keine neuen Effekte.

wird. Mit Rücksicht auf die Superponierbarkeit der Lösungen kommt

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} z \,. \tag{11}$$

Die Gleichungen (6b) und (6c) lassen sich mit den Abkürzungen[1]

$$\left.\begin{aligned} \omega_u^2 &= \frac{B_u}{m}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, \\ \omega_v^2 &= \frac{B_v}{m}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \end{aligned}\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

und mit (9) auf die Form bringen

$$\ddot{T}_u - 2\,\omega\,\dot{T}_v + (\omega_u^2 - \omega^2)\,T_u = 0\,, \qquad \ddot{T}_v + 2\,\omega\,\dot{T}_u + (\omega_v^2 - \omega^2)\,T_v = 0\,. \tag{13}$$

Der Schwingungsansatz

$$T_u = A\,e^{j\varrho t} = A\,(\cos\varrho\,t + j\sin\varrho\,t)\,, \qquad T_v = B\,e^{j\varrho t} = B\,(\cos\varrho\,t + j\sin\varrho\,t)\,, \tag{14}$$

wobei A, B und ϱ im allgemeinen komplexe, von t unabhängige Werte annehmen können, führt auf das homogene Gleichungssystem

A	B	
$(\omega_u^2 - \omega^2) - \varrho^2$	$-j\,2\,\omega\,\varrho$	0
$+j\,2\,\omega\,\varrho$	$(\omega_v^2 - \omega^2) - \varrho^2$	0

(15)

mit der Verträglichkeitsbedingung

$$\mathrm{Det} = \varrho^4 - 2\,\varrho^2\left(\omega^2 + \frac{\omega_u^2 + \omega_v^2}{2}\right) - (\omega^2 - \omega_u^2)\,(\omega^2 - \omega_v^2) = 0\,, \tag{16}$$

die zugleich die gesuchte Frequenzgleichung im rotierenden System darstellt. Sie liefert vier und nur vier verschiedene Eigenwerte ϱ, welche entsprechend dem Ansatz (14) als Kreisfrequenzen in Betracht kommen. Aufgelöst nach ϱ^2 wird (16)

$$\varrho^2 = \omega^2 + \frac{\omega_u^2 + \omega_v^2}{2} + \sqrt{2\,\omega^2\,(\omega_v^2 + \omega_u^2) + \frac{1}{4}\,(\omega_v^2 - \omega_u^2)^2}\,. \tag{17}$$

a) Diskussion der Frequenzgleichungen. Die Diskussion der Frequenzgleichungen im rotierenden System ist relativ einfach, da sie lediglich biquadratisch in ϱ ist.

Das Kriterium für die Stabilität der Lösungen folgt unmittelbar aus (14) mit der charakteristischen Größe ϱ.

Zunächst erkennt man aus (16), daß sich für jedes ω keine komplexen, sondern nur reelle, positive oder negative Werte für ϱ^2, somit nur reelle oder imaginäre Werte für ϱ ergeben. Ist ϱ reell, so führt der Ansatz (14) auf periodische Schwingungen mit der Kreisfrequenz ϱ im rotierenden System, die Lösung ist stabil.

Ist ϱ hingegen imaginär, so ergeben sich Kreisfunktionen mit komplexem Argument $j\,\varrho\,t$, die durch Hyperbelfunktionen mit reellem Argument $\varrho\,t$ zu ersetzen sind. Da letztere mit der Zeit unbeschränkt zunehmen, ist die Lösung instabil.

Für $\varrho = 0$ genügt der Ansatz (14) nicht mehr. Es muß ein weiteres partikuläres Integral gefunden werden, das dann zu instabilen Lösungen führt.

Die in ϱ^2 quadratische Gleichung (16) besitzt zwei reelle positive Wurzeln ϱ^2 für

$$\left(\omega^2 + \frac{\omega_u^2 + \omega_v^2}{2}\right)^2 > (\omega^2 - \omega_u^2)\,(\omega^2 - \omega_v^2) > 0\,.$$

Es ergeben sich dann zweimal zwei stabile Lösungen für

$$\omega_u > \omega > \omega_v\,.$$

Weil in (1) $B_v > B_u$ vorausgesetzt wurde, ist nach (12) $\omega_v > \omega_u$.

Andererseits besitzt (16) eine reelle positive und eine reelle negative Wurzel ϱ^2 für

$$(\omega^2 - \omega_u^2)\,(\omega^2 - \omega_v^2) < 0$$

[1] ω_u und ω_v müßten mit einem weiteren Index n versehen sein. Es soll einfachheitshalber davon abgesehen werden, wenn keine Verwechslung möglich ist.

und somit zwei stabile und zwei instabile Lösungen für

$$\omega_u < \omega < \omega_v$$

womit dieser ganze Bereich instabil wird.

Für $\omega = \pm\,\omega_u$ und $\omega = \pm\,\omega_v$, d. h. für die Grenzen zwischen stabilem und instabilem Gebiet wird $\varrho = 0$, der Ansatz (14) liefert eine (zeitunabhängige) Konstante im rotierenden System. Er genügt jedoch nicht und ist durch ein zweites partikuläres Integral zu ergänzen, das mit der Zeit unbeschränkt anwächst. Die Grenzen sind deshalb ebenfalls zum instabilen Gebiet zu zählen. Damit sind auch sämtliche Möglichkeiten ausgeschöpft.

Der einzige instabile Bereich liegt vor für Winkelgeschwindigkeiten $\omega_u \leqq \omega \leqq \omega_v$. Da jedoch den Größen ω_u und ω_v nach (12) wegen $n = 1, 2, 3, \ldots$ verschiedene Werte zukommen, wiederholen sich die instabilen Bereiche entsprechend n. Die physikalische Bedeutung von ω_u und ω_v geht aus (12) hervor. Es sind die Kreisfrequenzen der Welle für ebene Biegeschwingungen in Richtung der Hauptachsen des Querschnittes, wobei n die Ordnung der Oberschwingung angibt.

Die Frequenzen der möglichen Eigenschwingungen im ortsfesten System folgen aus der Beziehung

$$\nu = \omega + \varrho\,, \tag{18}$$

Da es sich ja um eine Drehung des bewegten Systems mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω handelt, und zwar ist ν die Kreisfrequenz im ortsfesten, ϱ diejenige im rotierenden System nach Gleichung (17).

Für die graphische Darstellung des Zusammenhanges $\nu = \nu(\omega)$ empfiehlt es sich, von folgenden drei definierten Größen Gebrauch zu machen. Es sei

$$\bar{B} = \frac{B_v + B_u}{2} \tag{19a}$$

der arithmetische Mittelwert der Biegesteifigkeiten,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{B_v - B_u}{\bar{B}} = 2\,\frac{B_v - B_u}{B_v + B_u} \tag{19b}$$

die bezogene Unrundheit der Welle, und

$$\bar{\omega} = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{\bar{B}}{m\,l^4}}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{19c}$$

die kritische Winkelgeschwindigkeit einer runden Welle der Biegesteifigkeit $\bar{B}$ auf starr-freidrehbaren Lagern. n bedeutet die Ordnung der Oberschwingung.

Daraus leiten sich die Beziehungen

$$B_u = \bar{B}\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right), \qquad B_v = \bar{B}\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right) \tag{20}$$

ab und mit (12) auch

$$\left.\begin{aligned} \omega_u^2 &= \bar{\omega}^2\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right), & \varepsilon &= \frac{\omega_v^2 - \omega_u^2}{\bar{\omega}^2}, \\ \omega_v^2 &= \bar{\omega}^2\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right), & \bar{\omega}^2 &= \frac{\omega_v^2 + \omega_u^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Frequenzgleichung (18) im ortsfesten System lautet mit diesen neuen Werten in dimensionsloser Form alsdann

$$\frac{\nu}{\bar{\omega}} = \frac{\omega}{\bar{\omega}} + \frac{\varrho}{\bar{\omega}}\,, \qquad \frac{\varrho}{\bar{\omega}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^2 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{16}}}\,. \tag{22}$$

Sie ist in Abb. 3 für die Parameter $\bar{\varepsilon} = 0{,}0.2,\ 0.5,\ 1.0$ und 1.5 graphisch dargestellt. Es lassen sich unmittelbar folgende Aussagen machen:

1. Es ist zu beachten, daß $\bar{\omega}$ nach (19c) mit einem Index n zu versehen wäre, der die Ordnung der Oberschwingung angibt. Das Diagramm wiederholt sich somit für alle Oberschwingungen.

2. Die Kreisfrequenzen ν im ortsfesten System sind drehzahlabhängig und damit auch die Eigenschwingungen.

3. Einer festen Winkelgeschwindigkeit ω der Welle und einer gegebenen Unrundheit $\bar{\varepsilon}$ sind im Ganzen vier Eigenkreisfrequenzen ν bezogen auf $\bar{\omega}$ zugeordnet; somit lassen sich vier Typen von Eigenschwingungen, jede mit Oberschwingungen unterscheiden.

4. Die Bewegung ist im allgemeinen nicht mehr periodisch, da die Kreisfrequenzen ν in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen.

5. Die Strahlen vom Nullpunkt aus deuten ein konstantes Verhältnis der Eigenkreisfrequenz ν zur Winkelgeschwindigkeit ω an. Man erkennt, daß z. B. Eigenschwingungen mit Drehzahlfrequenz nur möglich sind für $\omega = \bar{\omega}\sqrt{1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}} = \omega_u$ und $\omega = \bar{\omega}\sqrt{1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}} = \omega_v$ während Eigen-

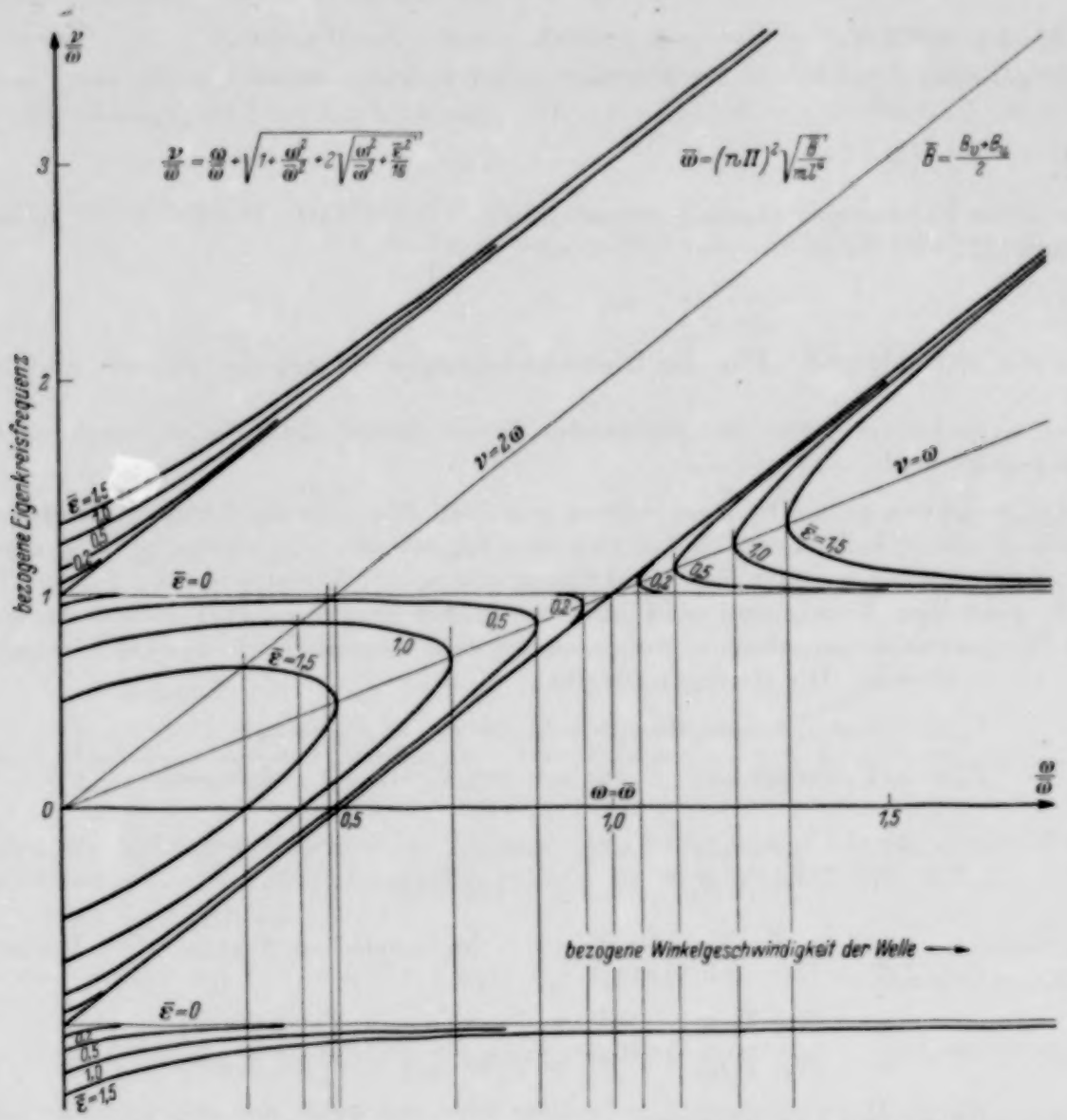


Abb. 3. Eigenkreisfrequenzen ν im ruhenden x—y-System in Funktion der Wellen-Drehzahl.

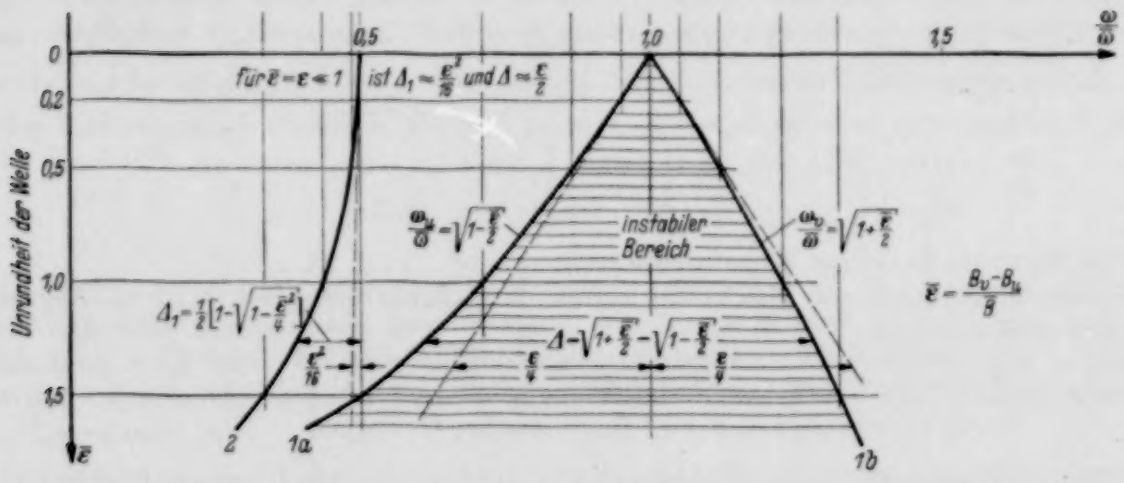


Abb. 4. Resonanzlagen und instabile Bereiche. — Kurve 1a und 1b $= \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)_{\nu = \omega}$ Resonanzlagen für Schwingung mit Drehzahlfrequenz (Unwucht); Kurve 2 $= \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)_{\nu = 0;\, 2\omega}$ Resonanzlagen für Schwingung mit doppelter Drehzahlfrequenz (Schwere).

schwingungen mit doppelter Frequenz der Drehzahl $\nu = 2\,\omega$, sog. doppelfrequente Eigenschwingungen, nur für eine einzige, bestimmte Winkelgeschwindigkeit $\omega \leqq \overline{\omega}/2$ möglich sind.

b) Instabiler Bereich. Zwischen ω_u und ω_v liegt der in Abb. 4 schraffierte, instabile Bereich, dessen Breite mit zunehmender Unrundheit $\overline{\varepsilon}$ der Welle zunimmt. Mach (21) ist

$$\omega_v - \omega_u = \overline{\omega}\left(\sqrt{1+\frac{\overline{\varepsilon}}{2}} - \sqrt{1-\frac{\overline{\varepsilon}}{2}}\right). \tag{23}$$

was in Abb. 4 graphisch zum Ausdruck kommt.

Für geringen Unterschied der Biegesteifigkeiten, wie etwa bei Turbogeneratoren, ist nach (19b) auch die Unrundheit der Welle klein. Man schreibt dann für $\overline{\varepsilon}$ zweckmäßiger ε

$$\overline{\varepsilon} \to \varepsilon \ll 1\,,$$

so daß in erster Näherung ε^2 gegen 1 vernachlässigt werden darf. Die Breite des instabilen Bereiches nach (23) wird dann in erster Näherung

$$\omega_v - \omega_u = \frac{\varepsilon}{2}\,\overline{\omega}$$

und ist somit unbedeutend. Für die Oberschwingungen wächst der Bereich allerdings nach (19c) mit n^2.

Die den Grenzkurven selbst entsprechenden Werte führen ebenfalls zu instabilen Lösungen, was noch gezeigt wird.

c) Stabile Lösungen. Die zwei reellen, positiven Wurzeln der Frequenzgleichung (16) für ϱ^2 seien mit ϱ_1^2 und ϱ_2^2 bezeichnet, so daß sich vier Eigenwerte $\pm\varrho_1$ und $\pm\varrho_2$ für ϱ ergeben. Der Ansatz (14) führt dann auf vier Eigenfunktionen mit je vier Konstanten für T_u und T_v. Die zu T_u und T_v gehörigen Konstanten sind aber durch die Beziehung (15) verknüpft, so daß nur noch vier Integrationskonstanten — entsprechend dem vierten Grade der Differentialgleichung (13) — C_1 bis C_4 bleiben. Die Rechnung ergibt

$$\left.\begin{aligned} T_u &= C_1\cos\varrho_1 t + C_2\sin\varrho_1 t + C_3\cos\varrho_2 t + C_4\sin\varrho_2 t\,,\\ T_v &= \delta_1 C_1\sin\varrho_1 t - \delta_1 C_2\cos\varrho_1 t + \delta_2 C_3\sin\varrho_2 t - \delta_2 C_4\cos\varrho_2 t\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

mit

$$\delta_i = \frac{\varrho_i^2 - (\omega_u^2 - \omega^2)}{2\,\omega\,\varrho_i} \equiv \frac{2\,\omega\,\varrho_i}{\varrho_i^2 - (\omega_v^2 - \omega^2)} \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Nun interessieren vor allem die Koordinaten x, y im ortsfesten System. Die Transformation nach (2) liefert vorerst

$$\left.\begin{aligned} x &= Z(z)\,T_x(t)\,, \qquad T_x = T_u\cos\omega t - T_v\sin\omega t\,,\\ y &= Z(z)\,T_y(t)\,, \qquad T_y = T_u\sin\omega t + T_v\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

und mit (24) nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} T_x &= D_1\cos(\omega-\varrho_1)t - D_2\sin(\omega-\varrho_1)t + D_3\cos(\omega-\varrho_2)t - D_4\sin(\omega-\varrho_2)t\\ &\quad + \vartheta_1 D_1\cos(\omega+\varrho_1)t + \vartheta_1 D_2\sin(\omega+\varrho_1)t + \vartheta_2 D_3\cos(\omega+\varrho_2)t + \vartheta_2 D_4\sin(\omega+\varrho_2)t\,,\\ T_y &= D_1\sin(\omega-\varrho_1)t + D_2\cos(\omega-\varrho_1)t + D_3\sin(\omega-\varrho_2)t + D_4\cos(\omega-\varrho_2)t\\ &\quad + \vartheta_1 D_1\sin(\omega+\varrho_1)t - \vartheta_1 D_2\cos(\omega+\varrho_1)t + \vartheta_2 D_3\sin(\omega+\varrho_2)t - \vartheta_2 D_4\cos(\omega+\varrho_2)t\,, \end{aligned}$$

$$\vartheta_i = \frac{\varrho_i^2 - (\omega_v^2-\omega^2) - 2\,\omega\,\varrho_i}{\varrho_i^2 - (\omega_v^2-\omega^2) + 2\,\omega\,\varrho_i} \equiv \frac{2\,\omega\,\varrho_i - \varrho_i^2 + (\omega_u^2-\omega^2)}{2\,\omega\,\varrho_i + \varrho_i^2 - (\omega_u^2-\omega^2)} \qquad (i = 1, 2)\,, \tag{26}$$

wobei D_1 bis D_4 neue, beliebige Konstanten bedeuten.

Der Gleichung (26) kann mit Rücksicht auf die Kreisfunktionen mit gleichem Argument auch die Form gegeben werden

$$\left.\begin{aligned} T_x &= H_1\cos(\nu_1 t + \varphi_1) + H_2\cos(\nu_2 t + \varphi_2)\\ &\quad + \vartheta_1 H_1\cos(\nu_3 t - \varphi_1) + \vartheta_2 H_2\cos(\nu_4 t - \varphi_2)\,,\\ T_y &= H_1\sin(\nu_1 t + \varphi_1) + H_2\sin(\nu_2 t + \varphi_2)\\ &\quad + \vartheta_1 H_1\sin(\nu_3 t - \varphi_1) + \vartheta_2 H_2\sin(\nu_4 t - \varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\nu_1 = \omega - \varrho_1)\\ &(\nu_2 = \omega - \varrho_2)\\ &(\nu_3 = \omega + \varrho_1)\\ &(\nu_4 = \omega + \varrho_2)\,. \end{aligned} \tag{27}$$

mit neuen Integrationskonstanten H_1, H_2, φ_1 und φ_2.

Es handelt sich offenbar um je vier harmonische Schwingungen mit den vier verschiedenen Kreisfrequenzen $\nu = \omega \pm \varrho_i$ $(i = 1, 2)$. In einem Zeigerdiagramm mit T_x und T_y als Koordinaten, kann die Eigenbewegung (27) der Welle auch gedeutet werden als vektorielle Summe von vier Zeigern, die sich mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ν um den Ursprung drehen. Die Größe und Lage der Zeiger hängt von den Anfangsbedingungen ab (vgl. Abb. 5).

Die Eigenbewegung ist im allgemeinen, wie schon aus Abb. 3 ersichtlich, nicht periodisch, da die Kreisfrequenzen ν nur in Spezialfällen rationale Verhältnisse aufweisen.

α) Spezialfälle. 1. Kleine Unrundheit. Die Gleichung (22) liefert die vier Eigenkreisfrequenzen ϱ im rotierenden, bzw. ν im ortsfesten System und Gleichung (26) ϑ_1 und ϑ_2:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= \omega + \bar{\omega}, & \nu_1 &= -\bar{\omega}, \\ \varrho_2 &= \omega - \bar{\omega}, & \nu_2 &= \bar{\omega}, \\ \varrho_3 &= -\varrho_1, & \nu_3 &= 2\omega + \bar{\omega}, \\ \varrho_4 &= -\varrho_2, & \nu_4 &= 2\omega - \bar{\omega}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= -\frac{\varepsilon}{8}\frac{\bar{\omega}^2}{\omega(\omega+\bar{\omega})}, \\ \vartheta_2 &= -\frac{\varepsilon}{8}\frac{\bar{\omega}^2}{\omega(\omega-\bar{\omega})}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

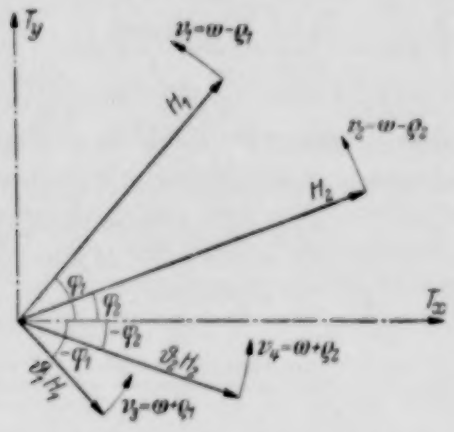


Abb. 5. Zeigerdiagramm der stabilen Eigenbewegung der Welle.

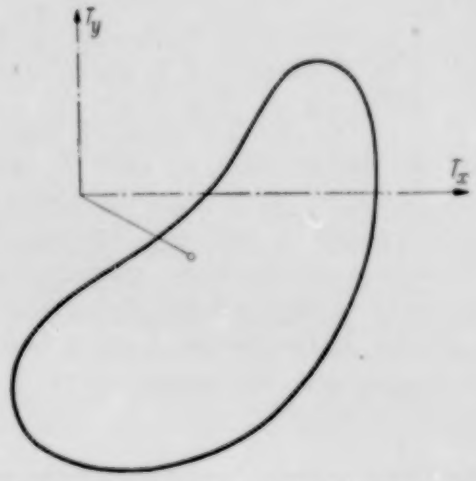


Abb. 6. Ortskurve der Zeiger bei stabiler Eigenbewegung für $\omega = \bar{\omega}/2$ und kleine Unrundheit $\varepsilon \ll 1$.

Abb. 3 zeigt die Abhängigkeit ν von ω. Es sind dieselben Kurven wie für $\bar{\varepsilon} = 0$. Periodische Lösungen treten auf, wenn $\omega/\bar{\omega}$ eine rationale Zahl ist, z. B. . . . 1/3, 1/2, 1, 2, 3, . . .

Für $\omega = \bar{\omega}/2$ wird (27) zu

$$\left.\begin{aligned} T_x &= H_1 \cos(-\bar{\omega}t + \varphi_1) + H_2 \cos(\bar{\omega}t + \varphi_2) - \frac{\varepsilon}{6} H_1 \cos(2\bar{\omega}t - \varphi_1) + \frac{\varepsilon}{2} H_2 \cos(-\varphi_2), \\ T_y &= H_1 \sin(-\bar{\omega}t + \varphi_1) + H_2 \sin(\bar{\omega}t + \varphi_2) - \frac{\varepsilon}{6} H_1 \sin(2\bar{\omega}t - \varphi_1) + \frac{\varepsilon}{2} H_2 \sin(-\varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Es treten Schwingungen mit doppelter und vierfacher Frequenz der Drehzahl auf, wobei die „doppelfrequenten" Schwingungen amplitudenmäßig überwiegen.

Ein Ortsdiagramm der Gleichung (29) ist in Abb. 6 dargestellt. Die Form der durchlaufenen Kurve ist geschlossen und leicht nierenförmig; sie degenieriert für $\varepsilon \to 0$ zu einer Ellipse.

2. Kreisrunde Welle, $\bar{\varepsilon} = 0$. Die allgemeine Lösung (27) läßt sich auf den Fall der kreisrunden Welle spezialisieren. Mit $\bar{\varepsilon} = 0$ wird $B_u = B_v = \bar{B}$ und $\omega_u^2 = \omega_v^2 = \bar{\omega}^2$ Die Kreisfrequenzen sind (28) zu entnehmen und die Lösung folgt aus (29) mit $\varepsilon = 0$:

$$\left.\begin{aligned} T_x &= H_1 \cos(-\bar{\omega}t + \varphi_1) + H_2 \cos(\bar{\omega}t + \varphi_2), \\ T_y &= H_1 \sin(-\bar{\omega}t + \varphi_1) + H_2 \sin(\bar{\omega}t + \varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Das Zeigerdiagramm besteht aus zwei Zeigern der Länge H bzw. H_2, die mit den Winkelgeschwindigkeiten $-\bar{\omega}$ bzw. $\bar{\omega}$, also entgegengesetzt drehen. Es handelt sich somit um eine ellipsenförmige Bewegung mit der Periode $2\pi/\bar{\omega}$ für z = konstant, was bekannt und zu zeigen war.

β) Anpassung an die Anfangsbedingungen. Es soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, daß sich die stabile Lösung (26), (27) beliebigen Anfangsbedingungen anpassen läßt und deshalb eine vollständige Lösung darstellt. In einem beliebigen Zeitpunkt ($t = 0$ bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit) soll Lage und Geschwindigkeit der Welle als Funktion der Länge z

gegeben sein, also

$$x(z,0) = f_x(z)\,, \qquad \dot{x}(z,0) = h_x(z)\,,$$
$$y(z,0) = f_y(z)\,, \qquad \dot{y}(z,0) = h_y(z)\,.$$

Mit Bezug auf (25) und (11) ergeben sich die $4\,n$ Gleichungen[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l} z\; T_x(0) = f_x\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l} z\; \dot{T}_x(0) = h_x\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l} z\; T_y(0) = f_y\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l} z\; \dot{T}_y(0) = h_y\,.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\sin\frac{n\pi}{l} z\,dz$ und integriert von $z = 0$ bis $z = l$, so wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_x(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f_x \sin\frac{n\pi}{l}\,dz\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_x(0) = \frac{2}{l}\int_0^l h_x \sin\frac{n\pi}{l} z\,dz\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} T_y(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f_y \sin\frac{n\pi}{l}\,dz\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_y(0) = \frac{2}{l}\int_0^l h_y \sin\frac{n\pi}{l} z\,dz\,.$$

Setzt man an Stelle von T_x und T_y die Integrationskonstanten D_i nach den Beziehungen (26) oder (27) ein, so wird man für jedes n auf vier inhomogene Gleichungen zur Bestimmung der vier Kontanten D_i geführt. Ist die Determinante dieses Systems von Null verschieden, so existieren tatsächlich nicht triviale Lösungen. Es handelt sich dann um eine vollständige Lösung im stabilen Bereich die den Rand- und Anfangsbedingungen genügt.

Im speziellen Falle kleiner Unrundheit $\bar{\varepsilon} \to \varepsilon \ll 1$, $\varepsilon^2 \to 0$ lautet das auf die zweckmäßigere Form (26) bezogene Gleichungssystem

D_1	D_2	D_3	D_4	$n = 1, 2, 3, \ldots$
$1 + \vartheta_1$	0	$1 + \vartheta_2$	0	$\frac{2}{l}\int_0^l f_x \sin\frac{n\pi}{l} z\,dz$
0	$1 - \vartheta_1$	0	$1 - \vartheta_2$	$\frac{2}{l}\int_0^l f_y \sin\frac{n\pi}{l} z\,dz$
0	$\bar{\omega} + \vartheta_1(2\omega + \bar{\omega})$	0	$-\bar{\omega} + \vartheta_2(2\omega - \bar{\omega})$	$\frac{2}{l}\int_0^l h_x \sin\frac{n\pi}{l} z\,dz$
$-\bar{\omega} + \vartheta_1(2\omega + \bar{\omega})$	0	$\bar{\omega} + \vartheta_2(2\omega - \bar{\omega})$	0	$\frac{2}{l}\int_0^l h_y \sin\frac{n\pi}{l} z\,dz$

(31)

mit

$$\vartheta_1 = -\frac{\varepsilon}{8}\,\frac{\bar{\omega}^2}{\omega(\omega + \bar{\omega})}\,, \qquad \vartheta_2 = -\frac{\varepsilon}{8}\,\frac{\bar{\omega}^2}{\omega(\omega - \bar{\omega})}\,.$$

Die Ausrechnung der Determinante ergibt

$$\mathrm{Det} = 4\,\bar{\omega}^2 \quad (\neq 0)\,.$$

Damit ist gezeigt, daß im stabilen Bereich für alle ω die Determinante von Null verschieden ist, somit mindestens für kleine Unrundheit die Konstanten D_i nicht trivial werden.

Als Beispiel sollen für den Fall $\omega = \bar{\omega}/2$ die Anfangsbedingungen so gewählt werden, daß für $t = 0$ die Welle gerade ist und infolge eines Stoßes eine Anfangsgeschwindigkeit $f_x = v_0$ auf ein kurzes Stück δ_0 im Abstand $z = z_0$ in Richtung x ausgeübt wird. Weil für $t = 0$ ruhendes und bewegtes Koordinatensystem zusammenfallen, ist die x-Richtung Hauptachsenrichtung für das größere Trägheitsmoment des Querschnittes, — der Stoß erfolgt also auf die „flache Seite" der Welle. Es gilt

$$f_x(z) = 0\,, \qquad h_x(z_0) = v_0 \qquad \big(h_x(z) = 0,\ z \neq z_0\big)\,,$$
$$f_y(z) = 0\,, \qquad h_y(z_0) = 0\,.$$

[1] Die hier belanglose Konstante A in (11) wurde eins gesetzt.

Die absoluten Glieder der Gleichung (31) lauten dann in der Reihenfolge der Kolonne: 0, 0, $\frac{2}{l} v_0 z_0 \sin \frac{n\pi}{l} z_0 = K$, 0, und die Konstanten geben

$$D_1 = 0\,, \qquad D_2 = \frac{K}{2\,\bar{\omega}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right), \qquad D_3 = 0\,, \qquad D_4 = -\frac{K}{2\,\bar{\omega}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right);$$

aus Gleichung (26) wird mit (28) endlich

$$T_x = \frac{K}{\bar{\omega}}\left[\sin \bar{\omega}\, t + \varepsilon\left(\frac{1}{6}\sin \bar{\omega}\, t - \frac{1}{12}\sin 2\,\bar{\omega}\, t\right)\right],$$

$$T_y = \frac{K}{\bar{\omega}}\left[\varepsilon\left(-\frac{1}{3}\cos \bar{\omega}\, t + \frac{1}{12}\cos 2\,\bar{\omega}\, t + \frac{1}{4}\right)\right].$$

In (25) eingesetzt und überlagert ergibt mit dem obigen Wert von K für $\omega = \bar{\omega}/2$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega} &= (n\pi)^2 \sqrt{\frac{\bar{B}}{m\, l^4}}\,, \\ x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, v_0 z_0}{l\,\bar{\omega}} \sin \frac{n\pi z_0}{l} \sin \frac{n\pi z}{l}\left[\sin \bar{\omega}\, t + \varepsilon\left(\frac{1}{6}\sin \bar{\omega}\, t - \frac{1}{12}\sin 2\,\bar{\omega}\, t\right)\right], \\ y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, v_0 z_0}{l\,\bar{\omega}} \sin \frac{n\pi z_0}{l} \sin \frac{n\pi z}{l}\left[\varepsilon\left(-\frac{1}{3}\cos \bar{\omega}\, t + \frac{1}{12}\cos 2\,\bar{\omega}\, t + \frac{1}{4}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

In einer Ebene $z =$ konst. durchläuft der Wellenmittelpunkt, wie schon bemerkt, eine geschlossene, nierenförmige Kurve, die für $\varepsilon \to 0$ zu einer Geraden in x-Richtung degeneriert. Die Komponenten schwingen mit doppelter und vierfacher Frequenz der Drehzahl.

Bezüglich der Oberschwingungen ist zu sagen, daß durch den Stoß im allgemeinen alle Eigenformen ($n = 1, 2, 3, \ldots$) angeregt werden, während im speziellen für einen Stoß in Wellenmitte $z_0 = l/2$ nur symmetrische Formen ($n = 1, 3, 5, \ldots$) auftreten. Die Amplituden der Oberschwingungen nehmen in jedem Fall mit $1/n^2$ ab. Die Verhältnisse sind im wesentlichen ähnlich denen der runden Welle ($\bar{\varepsilon} = 0$).

d) Instabile Lösungen. Die allgemeine Lösung von (13) mit vier Integrationskonstanten für den instabilen Bereich erfaßt man ebenfalls mit dem Ansatz (14). Die sich ergebenden imaginären Argumente $j\,\varrho\, t$ der Kreisfunktionen sind dann, wie anfangs bemerkt, durch Hyperbelfunktionen mit reellem Argument $\varrho\, t$ zu ersetzen. Im übrigen bleibt die Rechnung dieselbe wie für den stabilen Fall. Auf die Wiedergabe der Resultate darf deshalb verzichtet werden.

Hingegen bedürfen die Grenzfälle $\omega = \omega_u$ und $\omega = \omega_v$ noch einiger Erläuterungen. Geht man mit $\omega = \omega_u$, bzw. $\omega = \omega_v$ in die Frequenzgleichung (17) ein, so wird

$$\omega = \omega_u\colon \left\{\begin{aligned} \varrho_1^2 &= 3\,\omega_u^2 + \omega_v^2\,, \\ \varrho_2^2 &= 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad \omega = \omega_v\colon \left\{\begin{aligned} \varrho_1^2 &= \omega_u^2 + 3\,\omega_v^2\,, \\ \varrho_2^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und im ortsfesten System

$$\omega = \omega_u\colon \left\{\begin{aligned} \nu_1 &= \omega_u - \varrho_1\,, \\ \nu_2 &= \omega_u - \varrho_2 = \omega_u\,, \\ \nu_3 &= \omega_u + \varrho_1\,, \\ \nu_4 &= \omega_u + \varrho_2 = \omega_u\,, \end{aligned}\right\} \qquad \omega = \omega_v\colon \left\{\begin{aligned} \nu_1 &= \omega_v - \varrho_1\,, \\ \nu_2 &= \omega_v - \varrho_2 = \omega_v\,, \\ \nu_3 &= \omega_v + \varrho_1\,, \\ \nu_4 &= \omega_v + \varrho_2 = \omega_v\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Infolge des Zusammenfallens zweier Wurzeln liefert der Ansatz (14) nur drei partikuläre Integrale der Gleichung (13) mit den drei Integrationskonstanten H_1, φ, H. Transformiert ins rotierende System wird

$$\left.\begin{aligned} \omega = \omega_u\colon & \left\{\begin{aligned} T_x &= H_1\left[\cos(\nu_1 t + \varphi) + \vartheta_1 \cos(\nu_3 t - \varphi)\right] + H\cos \omega_u t\,, \\ T_y &= H_1\left[\sin(\nu_1 t + \varphi) + \vartheta_1 \sin(\nu_3 t - \varphi)\right] + H\sin \omega_u t\,, \\ \vartheta_1 &= \frac{2\,\omega_u \varrho_1 - \varrho_1^2}{2\,\omega_u \varrho_1 + \varrho_1^2}, \end{aligned}\right\} \\ \omega = \omega_v\colon & \left\{\begin{aligned} T_x &= H_1\left[\cos(\nu_1 t + \varphi) + \vartheta_1 \cos(\nu_3 t - \varphi)\right] + H\sin(-\omega_v t)\,, \\ T_y &= H_1\left[\sin(\nu_1 t + \varphi) + \vartheta_1 \sin(\nu_3 t - \varphi)\right] + H\cos(-\omega_v t)\,, \\ \vartheta_1 &= \frac{\varrho_1^2 - 2_1\,\omega_v \varrho_1}{\varrho_1^2 + 2_1\,\omega_v \varrho_1}. \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Es fehlt somit ein weiteres partikuläres Integral zur vollständigen Lösung der Gleichung (13), da sie vom 4. Grade in t ist.

Man erhält nun mit

$$\omega = \omega_u: \begin{cases} T_u = C\,t\,, \\ T_v = -\dfrac{2\,\omega_u}{\omega_v^2 - \omega_u^2}\,C\,, \end{cases} \qquad \omega = \omega_v: \begin{cases} T_u = -\dfrac{2\,\omega_v}{\omega_v^2 - \omega_u^2}\,C\,, \\ T_v = C\,t \end{cases}$$

tatsächlich das fehlende Integral mit der Konstanten C. Transformiert ins ortsfeste System ergibt sich[1]

$$\left.\begin{aligned} \omega = \omega_u: & \begin{cases} T_x = C\left[t\cos\omega_u t - \dfrac{2\,\omega_u}{\omega_v^2 - \omega_u^2}\sin\left(-\omega_u t\right)\right], \\ T_y = C\left[t\sin\omega_u t - \dfrac{2\,\omega_u}{\omega_v^2 - \omega_u^2}\cos\left(-\omega_u t\right)\right], \end{cases} \\ \omega = \omega_v: & \begin{cases} T_x = C\left[-\dfrac{2\,\omega_v}{\omega_v^2 - \omega_u^2}\cos\omega_v t + t\sin\left(-\omega_v t\right)\right], \\ T_y = C\left[-\dfrac{2\,\omega_v}{\omega_v^2 - \omega_u^2}\sin\omega_v t + t\cos\left(-\omega_v t\right)\right]. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Da hier die Zeit t als Faktor vor einem Summanden auftritt, nimmt diese Teillösung unbeschränkt zu mit der Zeit. Die Bewegung ist instabil und damit gehört auch die vollständige Lösung von (13) für $\omega = \omega_u$ und $\omega = \omega_v$ zum instabilen Typ. Die Grenzen zwischen stabilem und instabilem Bereich sind deshalb zum instabilen Bereich zu zählen.

4. Inhomogene Gleichungen (Erzwungene Schwingungen). a) Einfluß der Unwucht (Exzentrizität des Schwerpunktes). Gesucht wird ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung (3) mit dem „Störungsglied" (absoluten Glied) $e\,\omega^2\cos\beta$ bzw. $e\,\omega^2\sin\beta$, das durch eine Verlagerung des Schwerpunktes gegenüber dem Wellenmittelpunkt, die sogenannte Exzentrizität $\vec{e}$ entsteht.

Ein zeitunabhängiger Ansatz im rotierenden System führt die entsprechende Gleichung (3) über in zwei ungekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{B_u}{m}\,u^{\mathrm{IV}} - \omega^2\,u = e(z)\,\omega^2\cos\beta(z)\,, \qquad \frac{B_v}{m}\,v^{\mathrm{IV}} - \omega^2\,v = e(z)\,\omega^2\sin\beta(z)\,. \tag{36}$$

Man kann u und v in Form einer *Fourier*-Reihe ansetzen, wobei mit Rücksicht auf die gewählten Randbedingungen (8) nur sinus-Glieder zu berücksichtigen sind:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\,, \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\,. \tag{37}$$

Diese Ausdrücke in (36) eingeführt, ergeben mit den Bezeichnungen (12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\omega_{un}^2 - \omega^2\right)\sin\frac{n\,\pi\,z}{l} = e\,\omega^2\cos\beta\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\omega_{vn}^2 - \omega^2\right)\sin\frac{n\,\pi\,z}{l} = e\,\omega^2\sin\beta\,.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\sin\dfrac{n\,\pi\,z}{l}$ und integriert von 0 bis l so findet man die zu bestimmenden Koeffizienten:

$$a_n = \frac{\omega^2}{\omega_{un}^2 - \omega^2}\,\frac{2}{l}\int_0^l e\cos\beta\sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\,dz\,, \qquad b_n = \frac{\omega^2}{\omega_{vn}^2 - \omega^2}\,\frac{2}{l}\int_0^l e\sin\beta\sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\,dz\,.$$

Das gesuchte partikuläre Integral im rotierenden System lautet dann

$$\left.\begin{aligned} u = u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2}{\omega_{un}^2 - \omega^2}\sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l e(z)\cos\beta(z)\cdot\sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\,dz\,, \\ v = v_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2}{\omega_{vn}^2 - \omega^2}\sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l e(z)\sin\beta(z)\cdot\sin\frac{n\,\pi\,z}{l}\,dz\,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

[1] Die Lösungen entsprechen in ihrer Bedeutung denen der *Mathieu*schen. Die *Mathieu*schen Funktionen sind ebenfalls Lösungen der *Mathieu*schen Gleichung für Grenzpunkte zwischen den verschiedenen Gebieten der *Ince-Strutt*schen Karte.

oder tansformiert ins ortsfeste System

$$x = u_0 \cos \omega t + v_0 \sin (-\omega t), \qquad y = u_0 \sin \omega t + v_0 \cos (-\omega t). \tag{39}$$

Es handelt sich in jedem Fall um eine kreisförmige Bewegung der Welle mit der Winkelgeschwindigkeit ω im ortsfesten System — wie bei der isotropen Welle (vgl. Abb. 7a). Der Unterschied besteht darin, daß erstens der Ausschlag der Welle von der Lage der Unwucht bezüglich dem unrunden Querschnitt abhängt und zweitens derjenige Punkt der Welle, der bei der Drehung den größten Radius beschreibt, der sogenannte „hohe Punkt" im allgemeinen nicht auf dem Strahl $\overline{OS}$ liegt, wie bei der isotropen Welle, was eine gewisse Bedeutung für das Auswuchten hat.

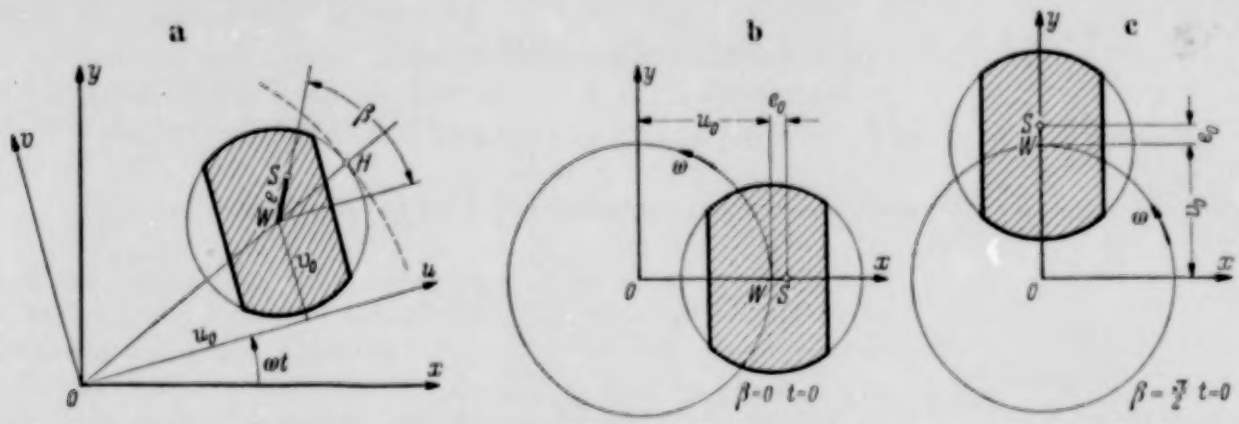


Abb. 7. Erzwungene Unwuchtschwingung. Einfluß der Unwuchtlage. — a) Unwucht beliebig; b) Unwucht auf 1. Hauptschwerachse ($\beta = 0$); c) Unwucht auf 2. Hauptschwerachse $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$.

Die erste Tatsache ist unmittelbar aus den folgenden zwei Extremfällen zu ersehen.

1) Mit $e(z) = e_0 = \text{konst.}$, $\beta(z) = 0$ wird aus (38) (vgl. Abb. 7b)

$$u_0 = e_0 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\omega^2}{n\pi(\omega_{un}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi z}{l}, \qquad x = u_0 \cos \omega t,$$

$$v_0 = 0, \qquad y = u_0 \sin \omega t.$$

2) Mit $e(z) = e_0 = \text{konst.}$, $\beta(z) = \pi/2$ wird aus (38) (vgl. Abb. 7c)

$$u_0 = 0,$$

$$v_0 = e_0 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\omega^2}{n\pi(\omega_{vn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi z}{l}, \qquad x = v_0 \sin (-\omega t),$$

$$y = v_0 \cos (-\omega t).$$

Die zweite Tatsache zeigt der Spezialfall

$$e = e_0 = \text{kons t}, \qquad \beta = \beta_0 = \text{konst}.$$

Aus (38) folgt nämlich

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{v_0}{u_0} \frac{\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\omega^2}{\omega_{un}^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi z}{l}}{\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\omega^2}{\omega_{vn}^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi z}{l}}.$$

Da der zweite Faktor nur im Falle der isotropen Welle ($\omega_{un}^2 = \omega_{vn}^2$) eins wird, ist die zweite Erscheinung offensichtlich (vgl. Abb. 7a).

Aus Gleichung (38) geht deutlich hervorvor, daß für $\omega = \omega_{un}$ und $\omega = \omega_{vn}$ die Ausschläge gegen ∞ streben. Der Grund liegt einfach darin, daß bei diesen Drehzahlen die Störfunktionen in „Resonanz" geraten mit den Eigenfunktionen. (Die homogenen Gleichungen enthalten die Störfunktionen als Summanden.)

Bezüglich der Oberschwingungen ist zu sagen, daß sie im wesentlichen durch Größe und Lage der Exzentrizität $\vec{e}$ längs z beeinflußt werden. Für längs z konstantes $\vec{e}$ nehmen sie mit dem reziproken Wert der Ordnungszahlen n ab (gleiche bezogene Verstimmung ω/ω_{un} bzw. ω/ω_{vn} vorausgesetzt).

b) Einfluß der Schwere. Es ist ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung (3) mit dem Störungsglied $g \sin \omega t$ bzw. $g \cos \omega t$ zu finden, indem der Einfluß der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ zufolge der horizontalen Lage der Welle zum Ausdruck kommt. Der Produktansatz (5) liefert

$$\left.\begin{aligned} \frac{\ddot{T}_u}{T_u} - 2\,\omega\,\frac{\dot{T}_v}{T_u} - \omega^2 + \frac{B_u}{m}\,\frac{Z^{IV}}{Z} &= \frac{g}{Z\,T_u}\sin\omega t\,, \\ \frac{\ddot{T}_v}{T_v} + 2\,\omega\,\frac{\dot{T}_u}{T_v} - \omega^2 + \frac{B_v}{m}\,\frac{Z^{IV}}{Z} &= \frac{g}{Z\,T_v}\cos\omega t\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Setzt man wie in (6a) $Z^{IV}/Z = k^4$ so wird entsprechend den Beziehungen (9), (10) und (12)

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{n\pi z}{l}\,[\ddot{T}_u - 2\,\omega\,\dot{T}_v + T_u\,(\omega_u^2 - \omega^2)] &= g\sin\omega t\,, \\ \sin\frac{n\pi z}{l}\,[\ddot{T}_v + 2\,\omega\,\dot{T}_u + T_v\,(\omega_v^2 - \omega^2)] &= g\cos\omega t\,, \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Beide Seiten mit $\sin\frac{n\pi z}{l}$ multipliziert und integriert von 0 bis l ergibt wegen

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi z}{l}\,dz = \frac{2\,l}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{T}_u - 2\,\omega\,\dot{T}_v + T_u\,(\omega_u^2 - \omega^2) &= \frac{4\,g}{n\pi}\sin\omega t\,, \\ \ddot{T}_v + 2\,\omega\,\dot{T}_u + T_v\,(\omega_v^2 - \omega^2) &= \frac{4\,g}{n\pi}\cos\omega t\,, \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \tag{41}$$

eine gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung in t.

Der Ansatz für ein partikuläres Integral von (41)

$$T_u = A\sin\omega t, \quad T_v = B\cos\omega t \tag{42}$$

führt auf ein inhomogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten A und B. Die Rechnung ergibt

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{4\,g}{n\pi}\,\frac{\omega_v^2 - 4\,\omega^2}{(\omega_u^2 - 2\,\omega^2)(\omega_v^2 - 2\,\omega^2) - 4\,\omega^4} = \frac{4\,g}{n\pi}\,\frac{\bar{\omega}^2\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right) - 4\,\omega^2}{\bar{\omega}^2\left[\bar{\omega}^2\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}\right) - 4\,\omega^2\right]}\,, \\ B &= \frac{4\,g}{n\pi}\,\frac{\omega_u^2 - 4\,\omega^2}{(\omega_u^2 - 2\,\omega^2)(\omega_v^2 - 2\,\omega^2) - 4\,\omega^4} = \frac{4\,g}{n\pi}\,\frac{\bar{\omega}^2\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right) - 4\,\omega^2}{\bar{\omega}^2\left[\bar{\omega}^2\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}\right) - 4\,\omega^2\right]}\,, \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots)\,. \tag{43}$$

Für die Transformation ins ortsfeste System ist es zweckmäßig A und B in folgender Weise zu zerlegen und von der zweiten Form in (43) Gebrauch zu machen:

$$\left.\begin{aligned} A = A_n &= C_n + D_n\,, \qquad C_n = \frac{4\,g}{n\pi\,\bar{\omega}^2}\,\frac{\bar{\omega}^2 - 4\,\omega^2}{\bar{\omega}^2\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}\right) - 4\,\omega^2}\,, \\ B = B_n &= C_n - D_n\,, \qquad D_n = \frac{4\,g}{n\pi}\,\frac{\bar{\varepsilon}}{2}\,\frac{1}{\bar{\omega}^2\left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}\right) - 4\,\omega^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Es wird dann nach ausgeführter Transformation

$$T_{xn} = D_n \sin 2\,\omega\,t\,, \qquad T_{yn} = C_n - D_n\cos 2\,\omega\,t\,. \tag{45}$$

Der anfängliche Produktansatz (5) liefert alsdann mit $Z = \sin\frac{n\pi}{l}z$ die gesuchte Bewegungsgleichung in Form einfacher Reihen:

$$\left.\begin{aligned} x &= D(z)\sin 2\,\omega\,t\,, \qquad D(z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi z}{l}\,, \\ y &= C(z) - D(z)\cos 2\,\omega\,t\,, \qquad C(z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi z}{l} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

mit

$$D_n = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \frac{4\,g\,m\,l^4}{(n\pi)^5\,\bar{B}} \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2\left(1-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}\right)-4\,\omega^2}, \qquad C_n = \frac{4\,g\,m\,l^4}{(n\pi)^5\,\bar{B}} \frac{\bar{\omega}^2-4\,\omega^2}{\bar{\omega}^2\left(1-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}\right)-4\,\omega^2}.$$

Der sich ergebende Bewegungszustand ist einfach zu übersehen. Für z = konst. durchläuft der Wellenmittelpunkt einen Kreis mit Radius D um einen Mittelpunkt, der vom Ursprung um den Betrag C in Richtung y der Schwere verschoben ist. Die Winkelgeschwindigkeit ist die doppelte derjenigen der Welle. Man spricht deshalb von Schwingungen mit doppelter Frequenz der Drehzahl oder kurz von doppelfrequenten Schwingungen. Der Kreis wird bei einmaliger Umdrehung der Welle zweimal durchlaufen. Vgl. Abb. 8.

Es werden nur symmetrische Schwingungsformen angeregt, da die Summation in (46) nur über $n = 1, 3, 5, \ldots$ zu erstrecken ist. Für die bestimmten Drehzahlen

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_u^2\,\omega_v^2}{2\,(\omega_u^2+\omega_v^2)}} = \frac{\bar{\omega}}{2}\sqrt{1-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}} \tag{47}$$

wird der Nenner der zeitunabhängigen Konstanten A, B, C und D Null. Die Störfunktionen geraten bei diesen Drehzahlen in Resonanz mit einer Eigenfunktion. Man erkennt dies rasch im Falle einer kleinen Unrundheit $\bar{\varepsilon} \to \varepsilon \ll 1$, $\varepsilon^2 \to 0$. Es ist für diesen Fall die kritische Winkelgeschwindigkeit der Welle für die doppelfrequente Schwingung nach (47) $\omega = \bar{\omega}/2$, also (mit Rücksicht auf die Näherung $\varepsilon^2 \approx 0$) ungefähr die Hälfte derjenigen einer unrunden Welle mittlerer Biegefestigkeit $\bar{B} = (B_v + B_u)/2$. Das partikuläre Integral (45) der inhomogenen Gleichung ist daher für $\omega = \bar{\omega}/2$ in der allgemeinen Lösung (29) der homogenen Gleichung enthalten, und somit ist die Resonanzbedingung erfüllt.

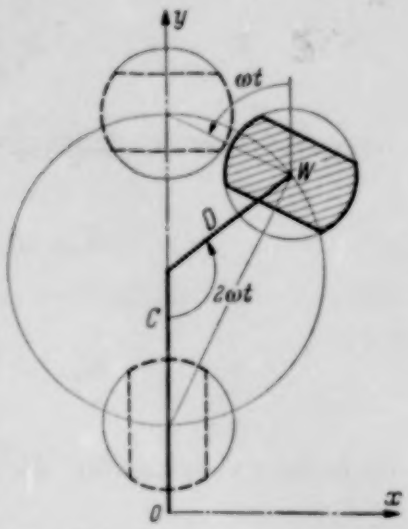


Abb. 8. Erzwungene Schwingung infolge der Schwere bei horizontaler Wellenlage. — y hat die Richtung der Erdbeschleunigung.

Die Bedeutung der Mittelpunktsverschiebung $C(z)$ erkennt man wiederum rasch im Falle der kleinen Unrundheit $\bar{\varepsilon} \to \varepsilon \ll 1$, $\varepsilon^2 \to 0$. Wie aus (46) hervorgeht ist für diesen Fall $C(z)$ unabhängig von der Drehzahl und beträgt

$$C(z) = \frac{m\,g\,l^4}{\bar{B}} \frac{4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Dies ist eine der möglichen Formen für die Gleichung der elastischen Linie der Welle infolge des Eigengewichtes[1]. Für geringe Unrundheit beschreibt also der Wellenmittelpunkt angenähert einen Kreis mit dem Radius $D(z)$ um die statische Gleichgewichtslage einer Welle mittlerer Biegesteifigkeit $\bar{B}$.

Die Lösung in Form der Summe von Oberschwingungen gestattet sofort das Verhalten der Oberschwingungen zu beurteilen. Aus Gleichung (46) erkennt man unschwer, daß die Oberschwingungen (gleiche bezogene Verstimmung $\omega/\bar{\omega}$ vorausgesetzt) im Verhältnis $1/n^5$ ($n = 1, 3, 5, \ldots$) abnehmen, wenn n die Ordnung angibt.

Im Gegensatz zu den durch eine Unwucht oder Schwerpunktsexzentrizität bedingten Oberschwingungen, welche für konstante Exzentrizität $\vec{e}$ im Verhältnis $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) abnehmen, dürften somit die doppelfrequenten Oberschwingungen von ungleich geringerer Bedeutung auf das Schwingungsverhalten eines Rotors sein.

c) Lagerkräfte. Durch die erzwungenen Schwingungen werden radial gerichtete Kräfte auf die Lager wirksam. Ihre Berechnung kann getrennt werden für diejenigen, welche durch Unwucht oder Schwerpunktsexzentrizität, und für diejenigen, welche durch die Schwere hervorgerufen werden. Die beiden Anteile sind in ihrer Wirkung zu überlagern.

---

[1] Vgl. *S. Timoshenko*, Strength of Materials Bd. II, S. 47. Für $z = l/2$ wird unter Berücksichtigung der ersten drei Glieder

$$C\left(\frac{l}{2}\right) = 1{,}302 \cdot 10^{-2} \frac{m\,g\,l^4}{\bar{B}} \approx \frac{5}{384} \frac{m\,g\,l^4}{\bar{B}}.$$

1) *Einfluß der Unwucht.* Die Summe beider Lagerkräfte im rotierenden System kann mit Gleichung (1) berechnet werden. Es ist allgemein

$$K_u = -\int_0^l F_u\,dz = B_u \int_0^l u^{\mathrm{IV}}\,dz\,, \qquad K_v = -\int_0^l F_v\,dz = B_v \int_0^l v^{\mathrm{IV}}\,dz\,. \tag{48}$$

Mit u und v aus (38) wird

$$K_u = K_{u0} = B_u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_{un}^2 - \omega^2} \frac{2}{l} \int_0^l \frac{d^4}{dz^4} \left[\sin\frac{n\pi z}{l} \int_0^l e(z) \cos\beta(z) \sin\frac{n\pi z}{l}\,dz \right] dz\,,$$

$$K_v = K_{v0} = B_v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_{vn}^2 - \omega^2} \frac{2}{l} \int_0^l \frac{d^4}{dz^4} \left[\sin\frac{n\pi z}{l} \int_0^l e(z) \sin\beta(z) \sin\frac{n\pi z}{l}\,dz \right] dz$$

oder einfacher mit Rücksicht darauf, daß das zweite Integral von z unabhängig ist,

$$K_{u0} = \frac{4\pi^3 B_u}{l^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^3 \frac{\omega^2}{\omega_{un}^2 - \omega^2} \int_0^l e(z) \cos\beta(z) \sin\frac{n\pi z}{l}\,dz\,,$$

$$K_{v0} = \frac{4\pi^3 B_v}{l^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^3 \frac{\omega^2}{\omega_{vn}^2 - \omega^2} \int_0^l e(z) \sin\beta(z) \sin\frac{n\pi z}{l}\,dz\,.$$

Es ist hier zweckmäßig, die Komponenten der Exzentrizität $\vec{e}$ in sinus-Reihen zu entwickeln. Mit

$$e(z)\cos\beta(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi z}{l}\,, \qquad e(z)\sin\beta(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi z}{l}$$

und wegen der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi z}{l} \sin\frac{m\pi z}{l}\,dz = 0 \qquad (m \neq n)\,,$$

wird schließlich im rotierenden System

$$\left.\begin{aligned} K_{u0} &= \frac{2\pi^3 B_u}{l^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^3 \frac{\omega^2}{\omega_{un}^2 - \omega^2} \left(\frac{4}{n\pi} a_0 + a_n \right), \\ K_{v0} &= \frac{2\pi^3 B_v}{l^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^3 \frac{\omega^2}{\omega_{vn}^2 - \omega^2} \left(\frac{4}{n\pi} b_0 + b_n \right). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Für eine längs z konstante Unwucht wird z. B.

$$\left.\begin{aligned} K_{u0} &= \frac{a_0 B_u 8\pi^2}{l^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^2 \frac{\omega^2}{\omega_{un}^2 - \omega^2}, \\ K_{v0} &= \frac{b_0 B_v 8\pi^2}{l^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^2 \frac{\omega^2}{\omega_{vn}^2 - \omega^2}, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(e\cos\beta = a_0)\,, \\ &(e\sin\beta = b_0)\,. \end{aligned}$$

Im ortsfesten System sind die Lagerkräfte zeitlich veränderlich, entsprechend der Transformation (2)

$$K_x = K_{u0}\cos\omega t + K_{v0}\sin(-\omega t)\,, \qquad K_y = K_{u0}\sin\omega t + K_{v0}\cos(-\omega t)\,. \tag{50}$$

Resonanzen treten auf bei den kritischen Drehzahlen

$$\omega = \omega_{un}\,, \qquad \omega = \omega_{vn}\,.$$

Im Gegensatz zu den Auslenkungen macht sich der Einfluß der Oberschwingungen auf die Lagerkräfte stärker bemerkbar. Er ist verständlicherweise abhängig von Größe und Lage der Exzentrizität $\vec{e}(z)$ längs z. Für ein längs z konstantes $\vec{e}$ wächst der Einfluß mit n^2 (gleiche Verstimmung ω/ω_{un} bzw. ω/ω_{vn} vorausgesetzt).

2) *Einfluß der Schwere.* Die Summe beider Lagerkräfte im rotierenden System wird durch Gleichung (48) und Gleichung (5) mit $Z = \sin \frac{n \pi z}{l}$ wie folgt bestimmt:

$$K_u = B_u \int_0^l u^{IV}\, dz\,, \qquad u = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi z}{l} \cdot T_{un}\,,$$

$$K_v = B_v \int_0^l v^{IV}\, dz\,, \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi z}{l} \cdot T_{vn}\,.$$

Nach durchgeführter Differentiation und Integration ist

$$K_u = 2\, B_u \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{n \pi}{l}\right)^3 T_{un}\,, \qquad K_v = 2\, B_v \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{n \pi}{l}\right)^3 T_{vn}\,.$$

Mit Hilfe der Transformationsformeln

$$K_x = K_u \cos \omega t - K_v \sin \omega t\,, \qquad K_y = K_u \sin \omega t + K_v \cos \omega t$$

sowie den Beziehungen (42) und (44), nämlich

$$T_u = (C_n + D_n) \sin \omega t\,, \qquad T_v = (C_n - D_n) \cos \omega t$$

lassen sich die Lagerkräfte im ortsfesten System berechnen. Nach einigen Umformungen entsteht

$$K_x = D \sin 2\, \omega t\,, \qquad K_y = C - D \cos 2\, \omega t\,, \tag{51}$$

wobei

$$D = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{n \pi}{l}\right)^3 [- C_n (B_v - B_u) + D_n (B_v + B_u)\,,$$

$$C = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{n \pi}{l}\right)^3 [C_n (B_v + B_u) - D_n (B_v - B_u)]$$

oder mit den Größen $\overline{B}$, $\overline{\varepsilon}$ und $\overline{\omega}$ entsprechend (19) ausgedrückt

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\overline{\varepsilon}}{2} \frac{8\, g\, m\, l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{4\, \omega^2}{\overline{\omega}^2 \left(1 - \frac{\overline{\varepsilon}^2}{4}\right) - 4\, \omega^2}\right], \qquad \overline{\omega} = \overline{\omega}_n = (n \pi)^2 \sqrt{\frac{\overline{B}}{m\, l^4}}\,, \\ C &= \frac{8\, g\, m\, l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{\overline{\omega}^2 - 4\, \omega^2}{\overline{\omega}^2 \left(1 - \frac{\overline{\varepsilon}^2}{4}\right) - 4\, \omega^2} - \frac{\overline{\varepsilon}^2}{4} \frac{\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2 \left(1 - \frac{\overline{\varepsilon}^2}{4}\right) - 4\, \omega^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Für kleine Unrundheit $\overline{\varepsilon} \to \varepsilon \ll 1$, $\varepsilon^2 \to 0$ wird aus (52) ,wenn mit $G = g\, m\, l$ das Eigengewicht der Welle bezeichnet wird[1],

$$D = \varepsilon\, G \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{4\, \omega^2}{\overline{\omega}^2 - 4\, \omega^2}\right), \qquad C = G \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv G\,. \tag{53}$$

Man erkennt aus der Form (51), daß es sich um einer Schwingung mit doppelter Frequenz der Drehzahl handelt. Im Falle kleiner Unrundheit beschreibt der Schwingungszeiger einen Kreis mit Radius D um den Vektor $\vec{G}$. Die Resonanzen sind durch Gleichung (51) bestimmt. Insbesondere ist die kritische Drehzahl für kleine Unrundheit $\omega \approx \overline{\omega}/2$.

Gleiche Verstimmung $\omega/\overline{\omega}$ vorausgesetzt, wachsen die Oberschwingungen im Verhältnis $1/n^2$. Ihr Einfluß auf niedere Drehzahlen ist deshalb bedeutend geringer als etwa im Falle einer (längs z konstanten) Exzentrizität des Schwerpunktes. Ein Vergleich läßt den Schluß zu, daß, gleiche Verstimmung vorausgesetzt, die Oberschwingungen der doppelfrequenten Schwingungen in ihrer Wirkung n^4 mal kleiner sind als etwa die Schwingungen mit Drehzahlfrequenz infolge einer über die Länge z gleichmäßig verteilten Unwucht. Ihre technische Bedeutung ist deshalb ungleich geringer.

---

[1] Für eine Lösung in geschlossener Form siehe *W. Kellenberger*, Brown Boveri Mitteilungen 42 (1955) S. 79. Der Vergleich ergibt

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{4\, \omega^2/\overline{\omega}_1^2}{n^4 - 4\, \omega^2/\overline{\omega}_1^2}\right) = \frac{1}{2\, L} \left(\frac{\cosh L - 1}{\sinh L} - \frac{\cos L - 1}{\sin L} - L\right), \qquad L = \pi \sqrt{2 \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}\,.$$

5. Zusammenfassung. Es wird das Biegeschwingungsverhalten einer glatten, rotierenden Welle untersucht, die einen unrunden Querschnitt aufweist. Das Problem würde mathematisch die Auflösung eines Systems von drei linearen, partiellen Differentialgleichungen sechster Ordnung mit harmonischen Koeffizienten erfordern. Es gelingt nun aber mit den üblichen Voraussetzungen und durch Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen in rotierenden Koordinaten ein System von zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erhalten. Zusammen mit den vorgeschriebenen Rand- und Anfangsbedingungen ist damit ein Randwertproblem achter Ordnung definiert. Die vollständige Lösung für vereinfachte Randbedingungen wird in Form von Reihen angegeben. Auf die gegenüber einer runden Welle sich ergebenden Besonderheiten wird hingewiesen. Insbesondere werden die Eigenschwingungen drehzahlabhängig. Es ergeben sich instabile Bereiche und neue, vermehrte Resonanzlagen. Die Unwuchtschwingung wird abhängig von der Lage der Unwucht bezüglich des Querschnittes, und nicht zuletzt, bei horizontaler Lage der Welle werden Schwingungen mit doppelter Frequenz der Drehzahl angeregt, sog. „doppelfrequente Schwingungen" mit eigenen, neuen kritischen Drehzahlen. Der Sonderfall geringer Unrundheit, wie er in der Technik häufig ist, vereinfacht die Resultate erheblich.

(Eingegangen am 19. Dezember 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Walter Kellenberger*, Wettingen (Aargau) (Schweiz), Flurweg 14.

Nichtlineare Mechanik

Von

Dr. Hans Kauderer

ord. Professor an der Technischen Hochschule Hannover

Mit 229 Abbildungen. XII, 684 Seiten Gr.-8°. 1958

Ganzleinen DM 64,50

Inhaltsübersicht: **Elastostatik:** Ein Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen. Der ebene Spannungszustand und das Biegeproblem. Drehsymmetrische Spannungszustände. Torsion zylindrischer Stäbe mit beliebigem Querschnitt. Biegung dünner Platten. — **Schwingungslehre:** A. Schwingungen mit einem Freiheitsgrad: I. Autonome Bewegungen: Allgemeine Untersuchungen. Konservative Schwingungen. Gedämpfte Schwingungen. Selbsterregte Schwingungen. — II. Heteronome Bewegungen: Zwangsschwingungen. Parametererregte Schwingungen. — B. Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden: I. Endlich viele Freiheitsgrade: Konservative Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden. Zwangsschwingungen mit zwei Freiheitsgraden. — II. Unendlich viele Freiheitsgrade: Autonome Bewegungen. Heteronome Bewegungen. — **Sachverzeichnis.**

Die meisten Probleme, die man in der klassischen Mechanik mathematisch durch eine lineare Differentialgleichung zu formulieren pflegt, sind streng genommen nichtlinear. Berücksichtigt man dies und geht von den nichtlinearen Differentialgleichungen aus, so lassen sich zahlreiche, von der linearen Theorie nicht erfaßbare Erscheinungen beschreiben, die heute in der Technik eine wichtige Rolle spielen. Dies gilt besonders von der Elastostatik und der Schwingungslehre.

Im ersten Teil des Buches wird eine Elastizitätstheorie der kleinen Verzerrungen entwickelt, bei der an die Stelle des Hookeschen Gesetzes ein nichtlineares Spannungs-Dehnungsgesetz tritt, das den tatsächlichen Eigenschaften vieler Werkstoffe besser gerecht wird. Die Theorie wird auf viele, von der klassischen Elastomechanik her bekannte Probleme angewandt. Der zweite Teil befaßt sich mit den wichtigsten Verfahren und Ergebnissen der in den letzten Jahren schon sehr weitgehend entwickelten Theorie der nichtlinearen mechanischen Schwingungen.

Besonderer Wert wurde gelegt auf die Darstellung der mathematischen Methoden, um den Leser instand zu setzen, auch neue Anwendungsbeispiele, die im Buch noch nicht behandelt worden sind, selbständig zu bearbeiten.

Das Buch setzt die Kenntnis der Grundlagen der Mechanik und der höheren Mechanik voraus und ist vor allem für Mathematiker, Physiker und Ingenieure bestimmt, die mit diesen neuen Anwendungsgebieten der Mechanik vertraut werden wollen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen

Von

Dr. Ekkehart Kröner

(Ergebnisse der angewandten Mathematik. Heft 5)

Mit 39 Abbildungen. VII, 179 Seiten Gr.-8°. 1958
Steif geheftet DM 32,—

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — I. Abschnitt. **Versetzungen im Kontinuum: Geometrie:** Versetzung und Volterrasche Distorsion. Plastische und elastische Distorsion. Die geometrische Grundgleichung der Kontinuumsmechanik des Festkörpers. Versetzungswanderung und plastische Distorsion. Die invarianten Bestandteile der Distorsionsfelder. Der geometrische Ursprung der Temperaturspannungen, der magnetischen Spannungen und der Konzentrationsspannungen. Die spannungsfreien Strukturkrümmungen. Die Grenzflächenbedingungen für die Distorsionen. Die Grenzflächenbedingungen für die Deformationen, flächenhafte Inkompatibilitätsverteilungen. Einiges über große Distorsionen. Bestimmung der Distorsionen eines Körpers mit Versetzungen. — II. Abschnitt. **Versetzungen im Kontinuum: Statik:** Der Spannungsfunktionstensor. Lösung des Summationsproblems bei Eigenspannungen. Die elastische Energie und das Variationsproblem des Mediums mit Eigenspannungen. Die bei Eigenspannungen auftretenden Randwertprobleme und ihre Behandlung mit Spannungsfunktionen. Erweiterung auf elastische Anisotropie, Doppelkräfte. Die elastizitätstheoretische Behandlung der singulären Versetzung. Die elastische Energie der singulären Versetzung. Die Kräfte auf Versetzungen und andere elastische Singularitäten, die Versetzung als elementare Eigenspannungsquelle. — III. Abschnitt. **Versetzungen im Kristall:** Allgemeines. Die geometrische Grundgleichung im Kristall: Die mikroskopische Theorie. Die geometrische Grundgleichung im Kristall: Übergang zur makroskopischen Theorie. Ebene Versetzungsanordnungen im Kristall. Die Versetzungstypen des kubisch flächenzentrierten Kristalls. Die nicht-lineare Behandlung der singulären Versetzung nach Peierls. — IV. Abschnitt. **Nicht-Riemannsche Geometrie der Versetzungen:** Die Theorie von Kondo und Mitarbeitern. Die Theorie von Bilby, Bullough und Smith. Diskussion. — V. Abschnitt. **Anwendungen:** Die Verfestigung der kubisch flächenzentrierten Metalle. Eine Näherungsmethode zur Berechnung der Selbstenergie singulärer Versetzungen. Fremdatome als elastische Dipole und Polarisationszentren. Anwendungen des Spannungsfunktionsenstors x' auf rotationssymmetrische und dreidimensionale Probleme. — Anhang. Die Zerlegung der Tensorfelder. 2. Stufe. — **Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.**

Die Versetzung hat als Träger der plastischen Verformung und als elementare Eigenspannungsquelle in den letzten Jahren größtes Interesse gewonnen. Im Gegensatz zu den bisherigen zusammenfassenden Darstellungen, die einen atomistischen Standpunkt beziehen, wird hier die Stellung der Versetzung in der Kontinuumsmechanik besprochen, in der sie eine Rolle spielt, die in vieler Hinsicht derjenigen des Stromes in der Elektrodynamik analog ist. Der Leser wird in die neuen Begriffe eingeführt. Der plastische und elastische Anteil der gesamten Verformung werden beide durch asymmetrische Tensorfelder beschrieben, deren Rotation die Versetzungsdichte ist. Letzteres bedingt im allgemeinen die Nichterfüllung der Kompatibilitätsbedingungen von de St. Venant bei Anwesenheit von Versetzungen. Die spezifischen Hilfsmittel von Eigenspannungszuständen sind der Inkompatibilitätstensor und der Spannungsfunktionstensor. Die hiermit arbeitende neue Theorie der Eigenspannungsbestimmung wird konsequent dargestellt. Die Kontiniuumstheorie wird auf die realen Kristalle angewandt. Die punktförmigen Gitterfehlstellen werden als elastische Singularitäten behandelt, für deren Wechselwirkung mit den elastischen Feldern im Kristall sehr weitreichende, einfache Formeln gelten. Ferner wird die nicht-Riemannsche Geometrie der Versetzungen von Kondo und Bilby und Mitarbeitern kurz dargestellt, die eine schöne Anwendung des Cartanschen Begriffes der Torsion auf den realen Körper ist.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN/GÖTTINGEN/HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.